

KONVEKTION IN FERROFLUIDEN

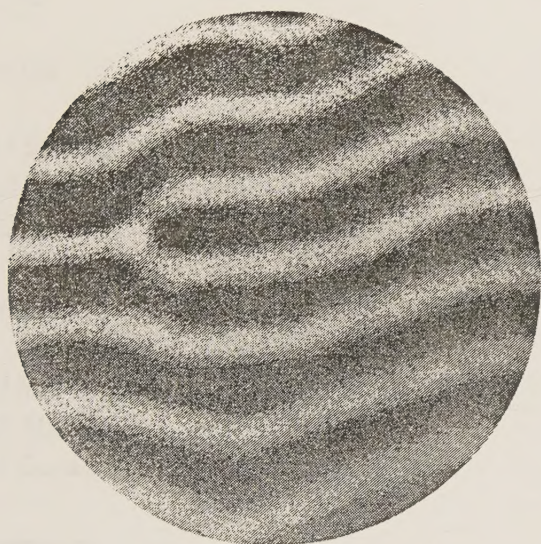
Leonhard Schwab

Disbui. München

1989



Konvektion in Ferrofluiden



Dissertation
der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Leonhard Schwab
aus Augsburg

München, den 20. März 1989

1. Gutachter: Prof. Dr. K. Stierstadt

2. Gutachter: Prof. Dr. H. Wagner

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juni 1989

Das Titelbild zeigt thermische Konvektion in einer 3 mm dicken Ferrofluidschicht, die von oben beheizt wird. Der sichtbare Durchmesser beträgt 25 mm. Die Methode zur optischen Abbildung der Strömung wird in Kapitel 6 beschrieben.

Inhaltsverzeichnis

<i>1. Einleitung</i>	<i>3</i>
<i>2. Konvektion</i>	<i>5</i>
<i>2.1 Stabilität</i>	<i>6</i>
<i>2.2 Modenselektion</i>	<i>12</i>
<i>2.3 Turbulenz</i>	<i>20</i>
<i>3. Ferrofluide</i>	<i>25</i>
<i>3.1 Herstellung und Zusammensetzung</i>	<i>26</i>
<i>3.2 Stabilität</i>	<i>29</i>
<i>3.3 Zustands- und Transportgleichungen</i>	<i>34</i>
<i>4. Kräftevergleich</i>	<i>43</i>
<i>4.1 Innere und äußere Kräfte</i>	<i>43</i>
<i>4.2 Folgerungen</i>	<i>49</i>
<i>5. Berechnungen</i>	<i>55</i>
<i>5.1 Die Gleichungen</i>	<i>56</i>
<i>5.2 Einfluß der Feldrichtung</i>	<i>66</i>
<i>5.3 Anisotropie der Flüssigkeit</i>	<i>72</i>
<i>5.4 Einfluß der Randbedingungen</i>	<i>76</i>
<i>5.5 Amplitude und Form der Konvektion</i>	<i>85</i>

6. Messungen	97
6.1 Meßmethoden	97
6.2 Magnetfeld	102
6.3 Temperaturregelung	104
6.4 Konvektionskammer	105
6.5 Optische Abbildung	107
7. Ergebnisse	117
7.1 Auswertung der Messungen	117
7.2 Form und Amplitude der Konvektion	124
7.3 Strukturelle Instabilitäten	129
7.4 Phasenturbulenz	134
Tafel I	139
Tafel II	140
Tafel III	141
8. Zusammenfassung	142
Literaturverzeichnis	144

1. Einleitung

Ferrofluide sind Suspensionen submikroskopisch kleiner magnetischer Einbereichsteilchen in einer nichtmagnetischen Trägerflüssigkeit. Die magnetischen Dipole erfahren im Magnetfeld ein Drehmoment und im Feldgradienten eine Kraft. Als Folge der Viskosität können sich die Teilchen aber nicht frei in der Trägerflüssigkeit bewegen. Vielmehr wirken die Drehmomente und Kräfte im wesentlichen auf die Suspension als ganzes. Dies verleiht den Ferrofluiden ungewöhnliche Eigenschaften und eröffnet neue technische Anwendungen.

Die Dipolwechselwirkung zwischen den Teilchen darf aufgrund ihrer großen Reichweite prinzipiell nicht vernachlässigt werden. In der Kontinuumsnäherung ist die Dipolwechselwirkung für den Unterschied zwischen dem lokalen Feld und dem äußeren Feld verantwortlich. Da das lokale Feld einerseits die Dynamik des Ferrofluids bestimmt, andererseits aber selbst an dessen Bewegung und Form gekoppelt ist, kann es Instabilitäten verursachen oder beeinflussen. Die nichtlineare Kopplung zwischen magnetischem Feld und Strömungsfeld macht Ferrofluide auch für Grundlagenfragen der Strukturbildung interessant. Bekannte Beispiele für magnetisch erzeugte Strukturen in Ferrofluiden bilden die Rayleigh-Taylor-Instabilität (Cowley & Rosensweig 1967), die Labyrinth-Instabilität (Tsebers & Mairov 1980) oder der Inverse Benetzungsübergang (Berkovsky & Bashtovoi 1980). Sie alle sind, den Blochdomänen in Ferromagnetika vergleichbar, hydrostatische Gleichgewichtsstrukturen, denn sie minimalisieren die Gesamtenergie, die sich aus magnetischer, potentieller und Grenzflächenenergie zusammensetzt.

Dissipative Strukturen, die von Strömungsinstabilitäten wie der Taylor-Rotation, der Rayleigh-Bénard-Konvektion oder der Teilchen-Diffusion erzeugt werden, sind dagegen in Ferrofluiden bisher experimentell nicht untersucht worden. Dies hängt damit zusammen, daß Diffusionsprozesse in Mehrphasengemischen komplex und nur teilweise verstanden sind, daß die

Stabilität solcher Gemische begrenzt ist und stationäre Zustände im Nichtgleichgewicht nur bedingt zuläßt, vor allem aber damit, daß die Strömung nicht direkt beobachtbar ist, weil Ferrofluide undurchsichtig sind. Andererseits bietet das äußere Magnetfeld als einer zusätzlichen und einfach kontrollierbaren Kraft jedoch die vielversprechende Möglichkeit, instabile Moden in Ferrofluiden gezielt zu beeinflussen und damit ihre Eigenschaften und Stabilitätsgrenzen dem Experiment zugänglich zu machen. Das Letztgenannte bildet die Motivation für die vorliegende Arbeit. Ihr Ziel besteht in der Untersuchung der Auswirkungen von Konkurrenz bzw. Kooperation zwischen Schwerkraft und magnetischer Kraft auf eine Strömungsinstabilität, nämlich die einsetzende und ausgebildete thermische Konvektion in Ferrofluiden.

Der Modellcharakter thermischer Konvektion und die grundlegenden Mechanismen, die zur Instabilität des ruhenden Zustandes und zum Übergang zur Turbulenz führen, sind Gegenstand des folgenden Kapitels. Das dritte Kapitel enthält eine Analyse der verwendeten Ferrofluide, ihrer Eigenschaften und der gemachten Näherungen. Die quantitativen und qualitativen Unterschiede zwischen magnetischen und archimedischen Auftriebskräften werden im vierten Kapitel abgeschätzt. Kapitel fünf und sechs enthalten die Rechen- und Meßmethoden, deren Ergebnisse im siebten Kapitel miteinander verglichen, interpretiert und unter Kapitel acht zusammengefaßt werden.

Alle dimensionsbehafteten Größen werden in SI-Einheiten angegeben. Vektoren und Tensoren werden entweder durch Indices oder durch Fettdruck gekennzeichnet.

2. Konvektion

Flüssigkeiten und Gase (Fluida) erlauben neben der Diffusion auch Transportvorgänge durch Konvektion. Die Konvektion stellt einen wesentlichen Beitrag zu Transportprozessen in der Natur und in der Technik dar, weil sie in der Regel effizienter ist als Diffusion. Zahlreiche Beispiele dafür finden sich in der Meteorologie, der Astrophysik, der Geophysik und in vielen praktischen Systemen: Nicht nur die Struktur der Atmosphäre von Planeten, die Granulation der Sonnenoberfläche, das Magnetfeld und die Kontinentaldrift der Erde werden von Konvektion bestimmt, sondern auch die Energieübertragung in Wärmetauschern, die Klimatisierung von Gebäuden, die Reaktionskinetik bei der Verbrennung oder die Dynamik von Grenzflächen.

Der konvektive Beitrag der Strömungsgeschwindigkeit erweitert die Diffusionsgleichungen um einen nichtlinearen Term, der die Ursache für die außerordentliche Komplexität turbulenter Strömungen bildet. Bevor jedoch ausgeprägte Turbulenz erreicht wird, durchlaufen viele Systeme eine Folge von Zuständen mit zunehmender Komplexität, bei denen jeweils nur wenige räumliche oder zeitliche Moden des infiniten Spektrums angeregt werden (schwache Turbulenz). Ein Beispiel dafür ist die klassische Rayleigh-Bénard Konvektion in einer in horizontaler Richtung homogenen und isotropen Flüssigkeitsschicht, die von unten beheizt und an ihrer Oberseite gekühlt wird. Aufgrund der Möglichkeit, die verschiedenen Instabilitäten zu separieren, wurde das Rayleigh-Bénard-Problem zum bevorzugten Gegenstand für das Studium des Übergangs zur Turbulenz. Der Schwierigkeit, die Bewegungsgleichungen für große Konvektionsamplituden lösen zu müssen, kann man experimentell ausweichen, indem man komplexe, z.B. nematische, binäre, dielektrische oder magnetische Flüssigkeiten verwendet. Sie erweitern zwar den Raum der Zustandsgrößen, erlauben aber gleichzeitig, höhere Instabilitäten in die Umgebung einsetzender Konvektion mit kleiner Amplitude zu bringen, wo Näherungsverfahren wie die Störungsentwicklung angewandt werden können.

2.1 Stabilität

Der thermodynamische Gleichgewichtszustand ist charakterisiert durch das Minimum eines Potentials, z.B. der Freien Energie. Jede Störung des Zustandes vergrößert die potentielle Energie und die sich daraus ergebende verallgemeinerte Kraft treibt den Zustand zurück zum Gleichgewicht. Strömende Flüssigkeiten sind nicht im Gleichgewicht, denn die viskose Reibung ist der Strömung stets entgegengerichtet. Die Abweichung vom Gleichgewicht kann nur unter der Wirkung von Kräften aufrechterhalten werden. Die antreibende Kraft kann selbstverständlich keine Potentialkraft sein, da für sie definitionsgemäß ein stabiler, statischer Zustand mit minimaler potentieller Energie existiert. Ein Beispiel für eine Kraft, die sich nicht aus einem Potential ableitet, ist der thermische Auftrieb, der auf ein Flüssigkeitselement wirkt, dessen Temperatur und damit auch dessen Dichte von der umgebenden Flüssigkeit abweicht. Da die Temperaturdifferenz zwischen dem Flüssigkeitselement und seiner Umgebung sowohl von der Zeit als auch von der Temperaturverteilung in der Flüssigkeit abhängt, ist dessen potentielle Energie nicht nur eine Funktion des Ortes, sondern auch eine Funktion der durchlaufenen Bahn. Insbesondere kann es geschlossene Bahnen geben, für die das Wegintegral der Kraft, die freigesetzte potentielle Energie, von Null verschieden ist. Wenn das Wegintegral der Kraft auch noch größer als die durch viskose Reibung dissipierte Energie ist, kann freie Konvektion in einer Flüssigkeit aufrechterhalten werden.

In einem Temperaturgradienten, der bezüglich der vertikalen Schwerkraft eine horizontale Komponente besitzt, befindet sich die Dichteverteilung im mechanischen Ungleichgewicht, das die Flüssigkeit durch Konvektion auszugleichen sucht. Wenn der Ausgleich durch andauernde Wärmezufuhr und -abfuhr verhindert wird, bleibt die Strömung bestehen. Ihre Amplitude wird von den Materialgrößen wie Viskosität und Wärmeleitfähigkeit bestimmt und ihre Form wie z.B. der typische Wirbeldurchmesser von der Längenskala äußerer Inhomogenitäten.

Der interessantere Fall ist durch eine horizontale Flüssigkeitsschicht gegeben, deren Ober- und Unterseite auf konstanten Temperaturen mit der Differenz ΔT gehalten werden. Im statischen Fall ergibt sich aus der

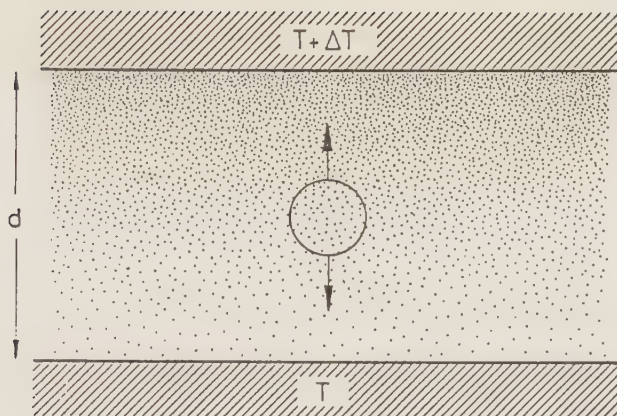


Diagramm 2.1 Zur Stabilität einer horizontalen Flüssigkeitsschicht, die von unten beheizt wird ($\Delta T < 0$). Als Folge der thermischen Ausdehnung nimmt die Dichte, veranschaulicht durch Schattierung, von unten nach oben zu.

Forderung minimaler Entropieproduktion, die als Potential für thermodynamisches Ungleichgewicht fungiert (Kittel 1958), ein homogener, vertikaler Temperaturgradient in der Flüssigkeitsschicht (siehe Bild 2.1). Man könnte vermuten, daß auch hier die Dichteverteilung stets Konvektion verursacht, wenn kalte schwere Flüssigkeit über erwärmter Flüssigkeit mit geringerer Dichte liegt. Tatsächlich befindet sich der Zustand aber im mechanischen Gleichgewicht, denn die konstante Dichte in horizontaler Richtung erzeugt keine Auftriebskraft. Zur Frage, ob Konvektion einsetzt, muß die Stabilität des Zustandes untersucht werden.

Eine Störung z.B. in Form einer vertikalen Verschiebung eines Flüssigkeitselements unterliegt zwei konkurrierenden Mechanismen. Erstens erfährt das Flüssigkeitselement aufgrund seiner von der Umgebung abweichenden Dichte eine Auftriebskraft, die die Bewegung verstärkt, weil sie in der gleichen Richtung wie die Verschiebung wirkt; mit der Aufwärtsbewegung gelangt ein Element leichter Flüssigkeit in eine Umgebung größerer Dichte, die es weiter nach oben trägt, und umgekehrt. Zweitens wird die Auftriebskraft aber geschwächt, weil der Temperaturunterschied

zur Umgebung und die Geschwindigkeit des Flüssigkeitselementes durch Wärme- bzw. Impulsdiffusion abnehmen. Die charakteristischen Anwachs- und Abklingzeiten für eine solche Störung können mit einer Dimensionsbetrachtung abgeschätzt werden. Als Anwachszeit τ_a nehmen wir die Dauer, die ein Flüssigkeitselement mit dem relativen Dichteunterschied $\Delta\rho/\rho$ im Schwerfeld g zum Durchlaufen der Schichtdicke d benötigt:

$$\tau_a = \sqrt{d/(g\Delta\rho/\rho)} . \quad (2.1)$$

Für die Abklingzeit τ_{th} der Temperaturstörung erhält man aus der Diffusionsgleichung mit der Temperaturleitzahl α

$$\tau_{th} = d^2/\alpha \quad (2.2)$$

und für die entsprechende Abklingzeit τ_v der Geschwindigkeitsstörung mit der kinematischen Viskosität ν

$$\tau_v = d^2/\nu . \quad (2.3)$$

Durch Vergleich dieser drei Zeitskalen kann nun die Frage nach der Stabilität beantwortet werden. Da nur die relativen Zeiten eingehen, genügt die Beschreibung in Form zweier dimensionsloser Verhältnisse. Für die Instabilitätsschwelle ist das Verhältnis von Abklingzeiten und Anwachszeiten maßgeblich. Wenn die ausgleichenden Diffusionsprozesse langsamer ablaufen als die Störung durch Konvektion anwächst, dann ist die Dichteverteilung instabil. Für Konvektion muß also das geometrische Mittel der reduzierten Abklingzeiten, das wir als archimedische Rayleigh-Zahl Ra bezeichnen, größer als ein noch zu bestimmender kritischer Wert Ra_c sein

$$Ra = \frac{\tau_{th} \cdot \tau_v}{\tau_a \cdot \tau_a} = \frac{\gamma g \Delta T d^3}{\alpha \nu} . \quad (2.4)$$

In Definition 2.4 wurde die Dichtedifferenz auf die thermische Ausdehnung

$$\gamma = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}$$

zurückgeführt. Die Diffusionszeiten sind für eine gegebene Flüssig-

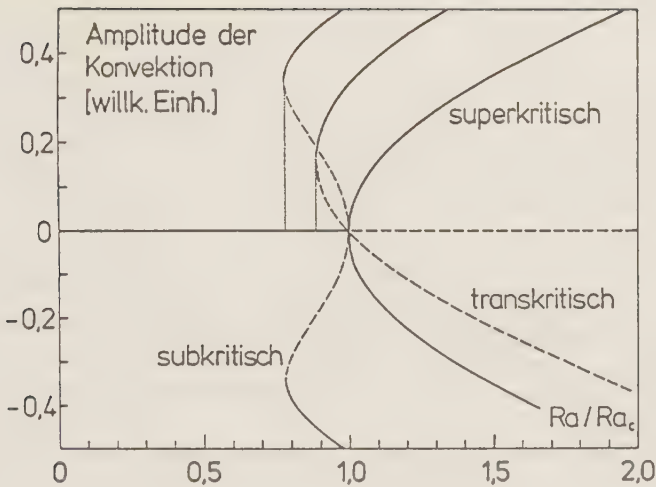
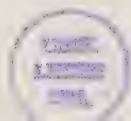


Diagramm 2.2 Schematische Darstellung möglicher Bifurkationen. Durchgezogene Linien repräsentieren die stabilen Lösungen der entsprechenden Verzweigung bei $Ra = Ra_c$.

keitsschicht in erster Näherung konstant, während die Konvektionszeit mit zunehmender Temperaturdifferenz abnimmt. Damit wird es möglich, den kritischen Schwellenwert Ra_c durch Vergrößern des Temperaturgradienten zu überschreiten. Der statische Zustand existiert zwar über den kritischen Punkt hinaus, wird dann aber instabil.

In Flüssigkeiten, deren Eigenschaften antisymmetrisch zur Schichtmitte sind, unterscheidet sich die Stabilität einer Aufwärtsbewegung nicht von der einer Abwärtsbewegung. In diesem Fall spalten sich am kritischen Punkt zwei neue Lösungen symmetrisch von der statischen Grundlösung ab (Diagramm 2.2). Die Bifurkation ist vorwärts gerichtet oder superkritisch, wenn stabile Konvektion auch für endliche Amplitude nur unter der Bedingung $Ra > Ra_c$ existiert. Bei Abweichungen von der Antisymmetrie wird eine der beiden Bewegungsrichtungen bevorzugt (transkritische Bifurkation), was sich im Konvektionsmuster (Abschnitt 2.2) widerspiegelt.



Ein zweites unabhängiges Verhältnis ergibt sich aus dem Vergleich der stabilisierenden Diffusionszeiten, das als Prandtl-Zahl bezeichnet wird

$$\text{Pr} = \frac{\tau_{th}}{\tau_v} = \frac{\nu}{\chi} . \quad (2.5)$$

Die Prandtl-Zahl hat keinen Einfluß auf den kritischen Wert der Rayleigh-Zahl, denn für die einsetzende Konvektion ist die Kooperation von Geschwindigkeits- und Temperaturstörungen entscheidend. Aber sie bestimmt die Stabilität jenseits von Ra_c , wo es auf die Konkurrenz zwischen den Ausgleichsvorgängen ankommt. In Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl klingen Störungen des Geschwindigkeitsfeldes entsprechend schneller ab als Temperaturstörungen. Dies bedeutet, daß sich die Geschwindigkeit, praktisch ohne Verzögerung der Temperaturverteilung anpaßt, oder, wie Haken (1977) es ausdrückt: Das Geschwindigkeitsfeld wird vom Temperaturfeld versklavt. Dadurch werden Trägheitseffekte vernachlässigbar und die einsetzende Konvektion ist stationär. Im entgegengesetzten Fall, wenn $\text{Pr} \ll 1$ gilt, bleibt eine Geschwindigkeitsstörung bestehen, auch wenn die beteiligte Temperaturstörung schon ausgeglichen ist, und zeitabhängige Konvektion setzt unmittelbar nach Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl ein (Clever & Busse 1974).

Der betrachtete Mechanismus für die einsetzende Konvektion und das Bifurkationsdiagramm 2.2 gilt qualitativ auch für andere oder höhere Instabilitäten. Dabei muß weder die antreibende Kraft von der Erdbeschleunigung herrühren, noch müssen die Dichteinhomogenitäten von Temperaturstörungen verursacht werden. In Ferrofluiden wirkt ein magnetischer Feldgradient als zusätzliche antreibende Kraft. Als typische Anwachszeit τ_m für eine Störung ΔM der Magnetisierung M in einem vertikalen Feldgradienten G erhalten wir in Analogie zu (2.1) mit der Induktionskonstante μ_0 :

$$\tau_m = \sqrt{d/(\mu_0 G \Delta M / \rho)} . \quad (2.6)$$

Wenn die magnetische Störung thermischen Ursprungs ist, folgt mit der pyromagnetischen Konstanten $K = -\Delta M / \Delta T$ für das geometrische Mittel der reduzierten Relaxationszeiten

$$\text{Rm} = \frac{\tau_{th} \cdot \tau_v}{\tau_m \tau_m} = \frac{\mu_0 K G \Delta T d^3}{\rho \chi \nu} . \quad (2.7)$$

Der thermisch induzierte magnetische Auftrieb destabilisiert den ruhenden Zustand, wenn die magnetische Rayleigh-Zahl R_m einen kritischen Wert R_{m_c} überschreitet.

Da magnetische Störungen ΔM auch vom Feld H oder von Schwankungen der Teilchenkonzentration φ ausgelöst werden können, müssen deren Relaxationszeiten in die Stabilitätsuntersuchung einbezogen werden.

Für die typische Abklingzeit τ_h einer Feldschwankung gilt

$$\tau_h = d^2/\zeta \quad , \quad (2.8)$$

wobei die magnetische Diffusivität ζ umgekehrt proportional zur elektrischen Leitfähigkeit σ ist (Chandrasekhar 1961). In Flüssigkeiten mit verschwindender Leitfähigkeit σ folgen die Feldstörungen instantan der Verteilung langsamer relaxierender Moden und tragen deshalb nicht direkt zur Destabilisierung bei.

Die zweite Relaxationszeit für Konzentrationsschwankungen ergibt sich mit der Teilchendiffusivität D zu

$$\tau_\varphi = d^2/D \quad . \quad (2.9)$$

Im Gegensatz zu τ_h wird τ_φ wegen der im allgemeinen kleinen Teilchendiffusivität sehr groß. Es sind die langsamsten Relaxationszeiten, die von anwachsenden Störungen zuerst eingeholt werden. Wir können deshalb die Teilchendiffusion nicht vernachlässigen und wählen als vierten dimensionslosen Parameter die Lewis-Zahl L

$$L = \frac{\tau_h}{\tau_\varphi} = \frac{D}{\chi} \quad . \quad (2.10)$$

Mit der Lewis-Zahl L und den Rayleigh-Zahlen R_a und R_m kann nun die Stabilität bezüglich konzentrationsinduzierter Dichte und Magnetisierungsschwankungen mit den Parametern R_a/L bzw. R_m/L beschrieben werden. Da die kritischen Werte für einsetzende Konvektion sowohl für R_a und R_m als auch R_a/L und R_m/L von der gleichen Größenordnung sind ($\sim 10^3$), folgt für $L \ll 1$, daß die Konvektion durch Teilchendiffusion schon bei $R_a \ll R_{a_c}$ bzw. $R_m \ll R_{m_c}$ einsetzen kann. Dabei wurde vorausgesetzt, daß Konzentrationsunterschiede vergleichbare Dichteschwankungen verursachen wie die thermische Ausdehnung. Das Verhältnis beider wird als Separationsverhältnis Y bezeichnet. Sein Wert wird für Ferrofluide in Kapitel 3.2 abgeschätzt.

2.2 Modenselektion

Die Stabilitätsbetrachtung des vorangehenden Abschnitts basierte auf der Schichtdicke d als einziger Längenskala eines ansonsten homogenen Systems. Mit der einsetzenden Konvektion kommt als zweite typische Länge der Abstand zwischen aufwärts und abwärts strömenden Bereichen, d.h. der Wirbeldurchmesser in horizontaler Richtung ins Spiel. Da für die Stabilität nur die kürzesten Relaxationszeiten und die längsten Anwachzeiten maßgeblich sind, müssen sie unter Verwendung der horizontalen Längenskala modifiziert werden. Bezeichnen wir den Wirbeldurchmesser in horizontaler Richtung mit $\lambda/2$, so folgt für die Minima der Diffusionszeiten

$$\tau_{th} = \begin{cases} d^2/\kappa & \text{für } \lambda/2 \geq d \\ \lambda^2/\kappa & \text{für } \lambda/2 < d \end{cases}$$

bzw.

$$\tau_v = \begin{cases} d^2/\nu & \text{für } \lambda/2 \geq d \\ \lambda^2/\nu & \text{für } \lambda/2 < d, \end{cases}$$

wobei vorausgesetzt wurde, daß die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit klein gegenüber der des Begrenzungsmediums ist. Die Anwachzeit τ_a verlängert sich für $\lambda/2 > d$ proportional zu λ , da die Beschleunigung nur in vertikaler Richtung wirkt:

$$\tau_a = \begin{cases} \sqrt{d/(g\Delta\rho/\rho)} & \text{für } \lambda/2 \leq d \\ \lambda/d \cdot \sqrt{d/(g\Delta\rho/\rho)} & \text{für } \lambda/2 > d. \end{cases}$$

Damit wird das geometrische Mittel der reduzierten Relaxationszeiten abhängig von λ und der kritische Wert der Rayleigh-Zahl divergiert im Grenzfall kleiner Wellenlängen proportional zu λ^{-4} und im Grenzfall großer Wellenlängen proportional zu λ^2 . In Diagramm 2.3 ist die kritische Rayleigh-Zahl gegen das dimensionslose Verhältnis von Schichtdicke und Wellenlänge, die Wellenzahl $a=2\pi d/\lambda$, aufgetragen. Zwischen den beiden divergierenden Ästen befindet sich ein Minimum, dessen zugehörige

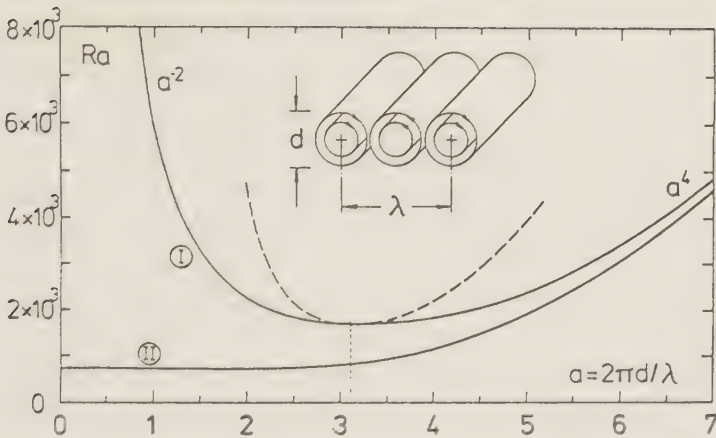


Diagramm 2.3 Neutrale Kurven $Ra_c(a)$ für einsetzende thermische Konvektion in einer Flüssigkeitsschicht zwischen perfekt wärmeleitenden Begrenzungsplatten (I) bzw. zwischen thermisch isolierenden Begrenzungsplatten (II). Die unterbrochene Kurve beschreibt die Stabilitätsgrenzen der Eckhaus-Instabilität.

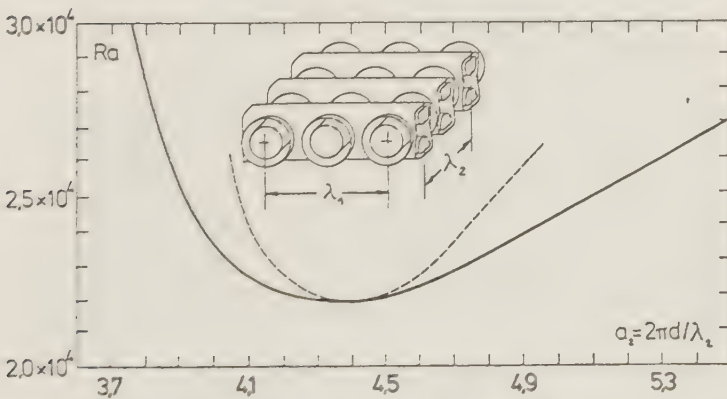


Diagramm 2.4 Neutrale Kurve $Ra(a_2)$ für bimodale Konvektion mit $a_1 = 3,117$. Die unterbrochene Kurve beschreibt die Stabilitätsgrenzen der Eckhaus-Instabilität (nach Frick, Busse & Clever 1983).

Wellenlänge als erste instabil wird. Es ist nicht zuletzt die Faszination an der spontan entstehenden Ordnung durch die Auszeichnung einer einzigen Wellenlänge, die das Interesse an dissipativen Phänomenen ausgelöst hat.

Bei relativ gut wärmeleitendem Begrenzungsmedium ist die kritische Wellenlänge doppelt so groß wie die Schichtdicke, d.h. die Konvektionswirbel haben kreisförmigen Querschnitt, und die Konvektion setzt ein, wenn die Rayleigh-Zahl den Wert $Ra_c = 1708$ überschreitet (Chandrasekhar 1961). Im Grenzfall thermisch isolierender Boden- und Deckplatte wächst die Diffusionszeit τ_{th} auch für $(\lambda/2) > d$ proportional mit λ^2 an, denn Isolierende Begrenzungen besitzen keine thermisch ausgleichende Wirkung. Da unter dieser Bedingung sowohl τ_{th} als auch τ_a^2 mit λ^2 divergieren, strebt die kritische Rayleigh-Zahl, die proportional zum Verhältnis von τ_{th} und τ_a^2 ist, für große Wellenlängen gegen den konstanten Wert $Ra_c = 720$ und die zugehörige kritische Wellenlänge ist unendlich (Jakeman 1968). Die experimentellen Bedingungen bei thermischer Konvektion kommen dem ersten Grenzfall meistens näher als dem zweiten. Wir haben den zweiten dennoch angeführt, weil er die von Konzentrationsschwankungen ausgelöste Konvektion in Schichten mit undurchlässigen Begrenzungsflächen exakt beschreibt, wenn τ_{th} durch τ_φ ersetzt wird (Jakeman 1968).

Die Auswahl einer bestimmten Wellenlänge enthält noch keine Information über die Anzahl N , die Richtungen $\mathbf{a}^{(m)}$ und die Phasen c_m der Wellenvektoren. Im Rahmen der linearen Theorie ist jede mit den Randbedingungen verträgliche Überlagerung von Wellen mit $|\mathbf{a}^{(m)}| = a_c$ möglich:

$$\sum_{m=-N}^N c_m \exp(i \mathbf{a}^{(m)} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Die nichtlineare Kopplung zwischen den Wellenvektoren $\mathbf{a}^{(m)}$ und Symmetrieüberlegungen schränken die Auswahl jedoch stark ein. Um zu gewährleisten, daß (2.11) reell ist, muß $c_{-m} = c_m^+$ und $\mathbf{a}^{(-m)} = -\mathbf{a}^{(m)}$ gelten. Mit c_m^+ wird das konjugiert komplexe von c_m bezeichnet. Die Isotropie in horizontaler Richtung zeichnet die regulären Fälle aus, bei denen die Winkel zwischen je zwei benachbarten Wellenvektoren gleich groß sind und alle Phasen den gleichen Betrag annehmen. Für die regulären

Fälle ist Homogenität modulo der Wellenlänge wie für die Bravais-Gitter in zwei Dimensionen nur für $N=1, 2$ oder 3 erfüllbar. $N=1$ beschreibt Konvektionsrollen und $N=2$ bzw. 3 eine Überlagerung von zwei bzw. drei Rollensystemen, die gegenseitig Winkel von 90° bzw. 60° einschließen, was zu einem quadratischen bzw. sechseckigen Konvektionsmuster führt. Die Überlagerung von drei Rollensystemen ist mehrdeutig, weil die Anzahl unabhängiger Phasen die Zahl der Freiheitsgrade in der Ebene übersteigt. Je nachdem, ob jeweils drei aufsteigende Phasen ($c_1 c_2 c_3 > 0$) oder drei absteigende Phasen ($c_1 c_2 c_3 < 0$) zusammenfallen, ergeben sich zwei qualitativ verschiedene Strukturen, die bei Geschwindigkeitsumkehr zwar ineinander übergehen, selbst aber nicht invariant dazu sind. In Diagramm 2.5 sind die vier klassischen Konvektionsformen dargestellt, wie sie bei der Sichtbarmachung mittels einer Schlierenmethode erscheinen (Jenkins 1988).

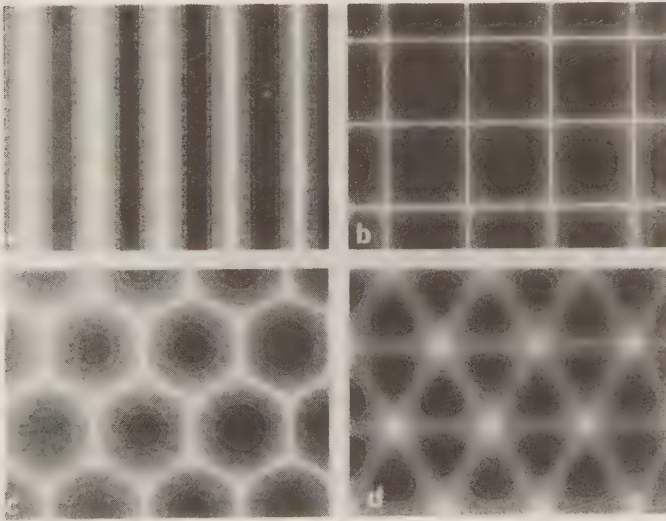


Diagramm 2.5 Theoretische Schlierenbilder der vier klassischen Konvektionsformen (aus Jenkins 1988): Konvektionsrollen (a), Quadrate (b), Sechsecke, in deren Zentrum erwärmte Flüssigkeit aufsteigt (c) und Sechsecke, in deren Zentrum kalte Flüssigkeit absinkt (d).

Nicht alle Konvektionsformen, die sich aus der Forderung von Isotropie und Homogenität ergeben, sind auch stabil. Unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen konnte Busse (1967b) zeigen, daß die Stabilitätsanalyse bei kleiner Amplitude durch ein Variationsprinzip ersetzt werden kann. Das zugehörige Potential läßt sich mit dem konvektiven Wärmetransport identifizieren, der mit der stabilen Konvektionsform seinen größten Wert annimmt. Bei symmetrischer Bifurkation und im Vergleich zur Flüssigkeit gut wärmeleitender Begrenzungsplatten ist der Wärmetransport von Konvektionsrollen am wirkungsvollsten, während bei schlechter leitenden Begrenzungsplatten Konvektion in Form von quadratischen Zellen stabil ist (Jenkins & Proctor 1984). Aufgrund der Asymmetrie der Sechseck-Konfigurationen bezüglich der Geschwindigkeitsrichtung zeichnet sich eine von beiden durch größeren Wärmetransport aus, wenn die Auftriebskraft von der Richtung der Störung abhängt. Ist beispielsweise die Viskosität temperaturabhängig, dann wird für positive Temperaturkoeffizienten Konfiguration 2.5c bevorzugt (Krishnamurti 1968 und Busse 1967b).

Zustände mit Wellenlängen in der Umgebung von λ_c werden möglich, wenn die Rayleigh-Zahl über ihren kritischen Wert hinaus erhöht wird. Dadurch öffnet sich ein Wellenlängenband periodischer Lösungen, das durch die neutrale Kurve $Ra_c(a)$ begrenzt wird. Welche der Lösungen innerhalb des Bandes realisiert wird, hängt von deren Stabilität und von den lateralen Begrenzungen des Systems ab. Die Stabilität von Konvektionsrollen für unendlich ausgedehnte Systeme wurde von Eckhaus (1965), von Busse (1967a) und von Busse & Whitehead (1971) untersucht. Das Problem der Stabilität ausgebildeter Konvektionsrollen ist dem Stabilitätsproblem einsetzender Konvektion vergleichbar. Als Ausgangszustand hat man jedoch stationäre Konvektion mit fester Wellenlänge λ . Störungen mit anderer Wellenlänge relaxieren im allgemeinen, es sei denn, der Abstand zwischen λ und der optimalen Wellenlänge überschreitet einen bestimmten Schwellenwert. Dann können Störungen anwachsen und die ursprüngliche Wellenlänge schließlich durch eine besser angepaßte ersetzen. In Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl wird der stabile Wellenlängenbereich auf das schraffierte Band zwischen den Kurven B und C in Diagramm 2.6 eingeschränkt.

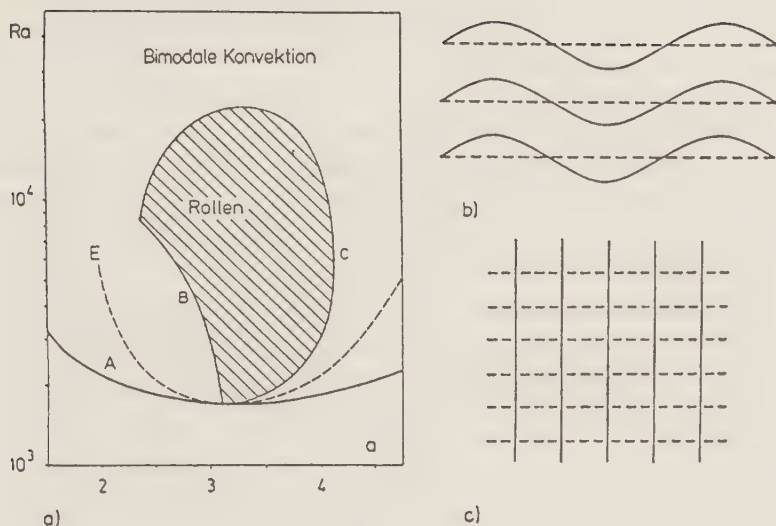


Diagramm 2.6 Stabilitätsbereich (schraffiert) von Konvektionsrollen für Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl (a). Bei Überschreiten der Stabilitätsgrenze B verbiegen sich die Rollen zick-zack-förmig (b), und bei Überschreiten der Stabilitätsgrenze C entstehen neue Konvektionsrollen, die senkrecht zu den ursprünglichen Rollen angeordnet sind (c) (nach Busse 1967a). Die unterbrochene Kurve E beschreibt die Stabilitätsgrenzen der Eckhaus-Instabilität.

Es gibt zwei verschiedene Mechanismen, die den unstetigen Übergang von instabilen zu stabilen Konvektionsrollen bewerkstelligen. Wenn die Wellenlänge λ verglichen mit der optimalen Wellenlänge zu groß ist, kann sie wirksam durch zick-zack-förmige Modulation der Konvektionsrollen auf den kleineren Wert $\lambda/\sqrt{2}$ übergehen (Zick-Zack-Instabilität). Die andere Möglichkeit besteht darin, daß die ursprünglichen Konvektionsrollen auf Kosten besser angepaßter Konvektionsrollen abklingen, wobei die in ihrer Amplitude anwachsenden Rollen senkrecht zu den ursprünglichen angeordnet sind (Cross-Roll-Instabilität). Im Gegensatz zur Zick-Zack-Instabilität kann die Cross-Roll-Instabilität sowohl für zu große als auch für zu kleine

Wellenlängen zu verbesserter Anpassung führen, und die Wellenlängendifferenz des Übergangs ist keinen topologischen Einschränkungen unterworfen.

Beide Übergangsmechanismen werden unterdrückt, wenn die Wellenvektoren auf eine Richtung festgelegt werden. Dadurch wird der Stabilitätsbereich auf die unterbrochenen Linien in Diagramm 2.6 erweitert, und der Anpassungsmechanismus besteht in der Reduktion bzw. im Vergrößern der Anzahl von Konvektionsrollen durch langwellige Modulation der Rollendurchmesser (Eckhaus 1965).

Für quadratische und sechseckige Zellen fand White (1988) ähnliche Stabilitätsbereiche wie der in Diagramm 2.6 dargestellte, obwohl sich die Übergangsmoden naturgemäß unterscheiden. Die Wellenlänge kann um den Faktor $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3}$ vergrößert werden, wenn je zwei bzw. drei benachbarte Zellen zu einer neuen verschmelzen (Zell-Fusion) oder um einen Faktor $1/\sqrt{2}$ bzw. $1/\sqrt{3}$ verkleinert werden, indem an den Eckpunkten der Zellen neue Quadrate bzw. Sechsecke entstehen (Mosaik-Instabilität).

Laterale Begrenzungen führen im allgemeinen auf zusätzliche Einschränkungen des Bereichs stabiler Wellenlängen z.B. in Form von Quantisierung der Moden (Kramer & Hohenberg 1984 und Zaleski 1984). In Systemen mit großem Aspektverhältnis Γ (horizontaler Halbmesser l in Einheiten der Schichtdicke d) wird der endliche Stabilitätsbereich und der Selektionsmechanismus durch Berandungen in der Regel von Defekten aufgehoben. Defekte führen ihrerseits zu Wellenlängenselektion, indem sie das stetige Anwachsen eines Gebietes mit optimaler Wellenlänge auf Kosten anderer Bereiche ermöglichen. Croquette & Pocheau (1984) fanden, daß Versetzungs- und Korngrenzenbewegungen für große Prandtl-Zahlen diejenige Wellenlänge selektieren, die abhängig von der Rayleigh-Zahl die Grenze bezüglich der Zick-Zack-Instabilität in Diagramm 2.6 bildet. Bei einer Struktur mit Defekten erwartet man somit perfekte Wellenlängenselektion und die realisierte Wellenlänge wächst mit steigender Rayleigh-Zahl im Bereich $Ra < 5 \cdot Ra_c$ nur geringfügig über ihren kritischen Wert λ_c an.

Mit weiter anwachsender Rayleigh-Zahl beobachtet man in Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl bei $Ra \approx 10 \cdot Ra_c$ eine zweite Bifurkation. Dabei wird

aber nicht die Grundmode bestehend aus Konvektionsrollen oder einer Überlagerung von Rollensystemen instabil, sondern es kommt eine weitere konvektive Mode dazu (bimodale Konvektion). Der Mechanismus der zweiten Instabilität ist identisch mit dem der einsetzenden Konvektion. Wenn die auf die thermische Randschicht δ bezogene Rayleigh-Zahl einen kritischen Wert übersteigt, dann wird die ruhende Randschicht instabil. Die Dicke δ der thermischen Randschicht ist umgekehrt proportional zum konvektiven Wärmetransport der Grundmode, der offenbar nicht groß genug ist, um die Randinstabilität zu verhindern, indem er δ hinreichend klein macht. Bei großen Rayleigh-Zahlen vermögen zwei Moden die Wärme wirksamer zu transportieren als eine. Die kritische Wellenlänge der auf die dünnere Randschicht ($\delta < d/2$) beschränkten Mode ist entsprechend kleiner als die Wellenlänge der Grundmode und die neuen Rollen sind senkrecht zum ursprünglichen Rollenmuster angeordnet, weil die Wechselwirkung zwischen beiden für diesen Winkel minimal wird (Frick et al. 1983). In der Gegenüberstellung der neutralen Kurven $Ra(a_1)$ (Diagramm 2.3) und $Ra(a_2)$ (Diagramm 2.4) auf Seite 13 wird noch einmal die enge Korrespondenz zwischen beiden Bifurkationen verdeutlicht. Da der Wellenvektor der bimodalen Konvektion durch die Orientierung der Grundmode festgelegt ist, werden Zick-Zack- und Cross-Roll-Instabilitäten unterdrückt und der Stabilitätsbereich wird von der Eckhaus-Instabilität begrenzt.

Man könnte nun vermuten, daß der Übergang zur Turbulenz, in Analogie zum Landau-Hopf-Bild, durch eine Folge von stationären Bifurkationen charakterisiert wird, die mit wachsender Zahl räumlicher Moden auf zunehmend komplexere Strömungsformen führt. Mit den verschiedenen Längenskalen multimodaler Konvektion wird jedoch die Impulsdiffusionszeit schließlich größer als die kürzeste thermische Diffusionszeit und Trägheitseffekte geben Anlaß zu zeitabhängiger Konvektion. In unendlich ausgedehnten und regelmäßigen Strukturen wächst die kritische Rayleigh-Zahl für oszillatorische Instabilität proportional mit der Prandtl-Zahl an (Busse & Whitehead 1974). Die Forderung nach Regelmäßigkeit ist jedoch eine Idealisierung, die praktisch nur erreicht werden kann, wenn sie von außen aufgeprägt wird. Bei spontan entstandenen Strukturen verursachen großräumige Strömungen als Folge von Defekten oder Berandungen zeitabhängige Konvektion schon für sehr viel kleinere Rayleigh-Zahlen (z.B. Krishnamurti 1970).

2.3 Turbulenz

Die möglichen Wege zur Turbulenz sind zahlreich und können bis heute nicht klassifiziert werden, denn die Sequenzen von dynamischen Bifurkationen, die zur Turbulenz führen, sind verschieden, wenn die räumliche Organisation der Strömung verschieden ist. Da mehrdeutige Lösungen typisch in der Hydrodynamik sind, erwartet man wenigstens so viele Szenarien wie räumlich unterschiedliche Strömungen bei gegebenen äußeren Parametern. Die Komplexität der Fragestellung erzwang bisher die Beschränkung auf Systeme mit kleiner lateraler Ausdehnung, die nur eine oder zwei Konvektionsrollen enthalten. Systeme mit kleiner Wellenanzahl bilden einen Spezialfall des umfassenderen Problems, denn die lateralen Berandungen bestimmen die Struktur der Konvektion eindeutig, indem sie alle anderen räumlichen Moden unterdrücken und somit die Relevanz der räumlichen Freiheitsgrade gegenüber den zeitlichen beseitigen (Stork & Müller 1972).

Die zeitlichen Abhängigkeiten resultieren dann aus lokalisierten Instabilitäten mit endlichen Frequenzen und die Wege zum Chaos können gut mit den bekannten Szenarien niederdimensionaler Systeme klassifiziert werden (Gollub & Benson 1980, Dubois 1982). Vergrößert man auf der anderen Seite die Anzahl der Konvektionsrollen, dann beginnen die räumlichen Freiheitsgrade an Einfluß zu gewinnen. Im unendlich ausgedehnten System äußern sich die zusätzlichen Freiheitsgrade in der Entartung von Richtung und Phase der Wellenvektoren. Diese Entartung wird im realistischen Fall endlicher aber großer Systeme nur teilweise aufgehoben. Neben der Wellenlänge, die im wesentlichen von der Schichtdicke bestimmt wird, werden langwellige Modulationen in der Größenordnung des lateralen Durchmessers 2:1 möglich. Sie lassen sich mit einer komplexen Amplitude A beschreiben, deren Phase die Änderung der Position und Orientierung der Rollen angibt und deren Betrag die Intensität der Konvektion moduliert. Sobald ein Rollenmuster Verzerrungen aufweist, genügt die Stabilitätsuntersuchung von regulären Strukturen nicht mehr, denn die langwelligeren Moden wirken auf das Muster zurück und bestimmen seine Dynamik.

Da die Amplitude beim Übergang zur Konvektion stetig anwächst, liegt es nahe, für die Zeitabhängigkeit der Amplitude

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta A} \quad (2.12)$$

anzusetzen, wobei F ein lokales Funktional von A ist, das nach A bzw. seinen räumlichen Gradienten entwickelt werden kann (Newell & Whitehead 1969 und Swift & Hohenberg 1977). Die Amplitudengleichung (2.12) enthält keinen Trägheitsterm, d.h. Zustände A relaxieren diffusionsartig zu einem der Minima A_0 des Potentials F . Unter Vernachlässigung der Phasen nimmt das Potential die gleiche Form an wie das Landau-Potential, das kontinuierliche Phasenumwandlungen in Molekularfeldnäherung beschreibt. Die enge Verwandtschaft des konvektiven Übergangs zu Gleichgewichts-Phasenumwandlungen wurde von Wesfreid et al. (1978) diskutiert und experimentell bestätigt.

Der komplementäre Aspekt der Phasenbewegung von Konvektionsrollen bei konstantem Betrag der Amplitude führt auf eine Diffusionsgleichung für die Phase ϑ (Pomeau & Manneville 1979)

$$\partial_t \vartheta = D_{\parallel} \partial_x \partial_x \vartheta + D_{\perp} \partial_y \partial_y \vartheta, \quad (2.13)$$

wobei die Diffusionskoeffizienten $D_{\parallel}$ und $D_{\perp}$ für die zeitliche Entwicklung einer Kompression bzw. einer Verbiegung des Rollensystems, das parallel zur y -Achse angenommen wurde, verantwortlich sind. Die Diffusionskoeffizienten sind abhängig von der Wellenlänge und von der Konvektionsamplitude und können ihr Vorzeichen auch umkehren. Ein negativer Koeffizient ist mit einer Instabilität der Rollenstruktur verknüpft. Die Kurve $D_{\parallel}=0$ fällt mit der Eckhaus-Instabilität zusammen, während $D_{\perp}=0$ die Stabilitätsgrenze für Zick-Zack-Instabilität bildet (vgl. Diagramm 2.6 auf Seite 17). Im dazwischen liegenden Bereich sind beide Koeffizienten positiv und man sollte Relaxation auf einem stationären Zustand erwarten. Für nicht zu große Aspektverhältnisse und Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl findet man die Erwartung experimentell bestätigt (z.B. Croquette & Pocheau 1984). Spontane Konvektion zeigt sich in Form von Rollen mit einheitlichem Durchmesser und uneinheitlicher Orientierungsverteilung für die typische Relaxationszeit von der Größenordnung der horizontalen Diffusionszeit l^2/χ ist. Aber es gibt auch Beispiele aperiodischer Konvektion bei

kleiner Amplitude, die nach einem Vielfachen der horizontalen Diffusionszeit noch keine Anzeichen von Relaxation auf einen stationären Zustand besitzen (Ahlers & Behringer 1978, Ahlers et al. 1985). Diese sogenannte Phasenturbulenz wird mit dem Instabilwerden großräumiger Konvektionsmoden in Verbindung gebracht (Croquette et al. 1986). Mit einer der Grundmode überlagerten mittleren Strömung hängt die zeitliche Entwicklung ihrer Amplitude nicht mehr nur von ihrem augenblicklichen Zustand ab, sondern auch von ihrer zeitlichen Veränderung, kann also nicht mehr mit einem Potential beschrieben werden.

Für großräumige Konvektion kommen im wesentlichen zwei Mechanismen in Frage. Erstens erzeugt die Krümmung von Konvektionsrollen eine mittlere Strömung senkrecht zu den Rollen (Siggia & Zippelius 1981). Die Amplitude der mittleren Strömung ist umgekehrt proportional zur Prandtl-Zahl, weshalb ihr Einfluß besonders in niedrig viskosen Flüssigkeiten von Bedeutung ist. In regelmäßigen Strukturen ist der von der Rollenkrümmung verursachte Fluß für die "Skewed-Varicose"-Instabilität verantwortlich (Busse & Clever 1979). Die mittlere Strömung, die aufgrund von Defekten entsteht, gibt aber schon bei kleineren Rayleigh-Zahlen Anlaß zu zeitabhängiger oder turbulenter Konvektion (Greenside et al. 1988, Pocheau 1988).

Ein zweiter Mechanismus für das Entstehen großräumiger Konvektionsmoden erwächst aus der Konkurrenz verschiedener Diffusionszeiten in binären Mischungen. Der stationäre Konvektionszustand wird infolge der Wechselbeziehung von thermischer Diffusion und Massediffusion zugunsten von fortschreitenden Konvektionsrollen instabil (Walden et al. 1985). Bewegte Rollen transportieren Impuls und Energie, aber nicht notwendigerweise Masse. Durch die Kopplung von Konzentration, Temperatur und Geschwindigkeit in der Navier-Stokes-Gleichung ist aber Massetransport, d.h. mittlere Strömung mit der Bewegung möglich. Aufgrund der Massenerhaltung muß der Transport in undurchlässigen Behältern auf geschlossenen Bahnen erfolgen. Bei kleinem Aspektverhältnis wird die von den bewegten Rollen mitgenommene Flüssigkeit durch einen entsprechenden Rückfluß in den vertikalen Randschichten kompensiert (Moses & Steinberg 1988). Die Rotation der mittleren Strömung hat dann wie die Rotation der Konvektionsrollen nur eine horizontale Komponente. Mit zunehmendem Aspektverhältnis entsteht Raum für Strömungsmoden mit vertikaler Rotation, denn Hin- und Rückfluß sind nicht auf den gleichen horizontalen

Bereich beschränkt (siehe Bild 2.7).

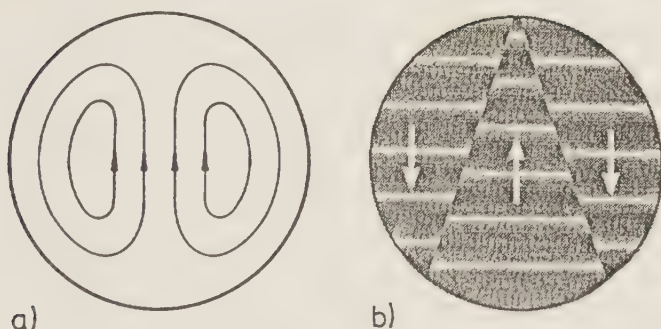


Diagramm 2.7 Beispiel einer großräumigen Konvektionsmode (a) als Folge von fortschreitenden Konvektionsrollen, wie in (b) angedeutet.

Es wird vermutet, daß solche großräumigen Strömungsmoden den Schlüssel zum Verständnis turbulenten Verhaltens liefern. Wie bei bimodaler Konvektion gibt es Konkurrenz zwischen zwei Moden mit unterschiedlicher charakteristischer Lineardimension, die hier durch die Dicke d und den Halbmesser l der Flüssigkeitsschicht gegeben sind. Im Gegensatz zur bimodalen Konvektion setzen großräumige Konvektionsmoden schon bei geringfügigem Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl ein. Es ist plausibel, daß die kritischen Werte für die Instabilität der Grundmode bezüglich einer oder mehrerer großräumiger Moden stark von Form und Größe des Behälters abhängen. Aber bei festem Aspektverhältnis wird die Dynamik im schwach turbulenten Bereich mittels Projektion des hochdimensionalen Raums auf wenige Moden von einem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem beschrieben. Abhängig von der Anzahl der räumlichen Moden kann man verschiedene Universalitätsklassen erwarten. Die Lorenz-Gleichungen beschreiben z.B. die Klasse, die als einzige räumliche Mode die Grundmode enthält (Lorenz 1963).

Zu einer systematischen Untersuchung der Stabilitätsgrenzen der Grundmode bezüglich großräumiger Strömung sollte die Wellenzahl, die Richtung und die Phase bzw. Phasengeschwindigkeit der Grundmode

kontrolliert werden können. Eine Möglichkeit besteht darin, den gewünschten Zustand durch äußere Inhomogenitäten aufzuprägen, z.B. durch räumlich periodisches Heizen. Solche Zustände sind aber im Gegensatz zu spontan entstandenen Strukturen nicht mit wenigen Parametern wie Rayleigh-Zahl oder Aspektverhältnis erfaßbar und ihre Entwicklung kann deshalb auch nicht als Funktion von wenigen äußeren Parametern beschrieben werden. Eine zweite Möglichkeit bietet sich in der Verwendung von Flüssigkeiten mit zusätzlichen inneren Eigenschaften an, z.B. die Magnetisierung von Ferrofluiden. Wie gezeigt werden wird, kann die Grundmode der thermischen Konvektion in Ferrofluiden mit nur einem weiteren Kontrollparameter, nämlich dem äußeren Magnetfeld, in weiten Grenzen manipuliert werden.

3. Ferrofluide

Auf magnetisch polarisierbare Flüssigkeiten können mit Magnetfeldern Kräfte ausgeübt werden. Eine weitere magnetisch verursachte Kraft ist die Lorentz-Kraft, die bewegte Ladungen im Magnetfeld erfahren. Auswirkungen der Lorentz-Kraft werden seit langem im Rahmen der Magnetohydrodynamik untersucht und sind insbesondere in der Plasmaphysik und der Dynamotheorie von Bedeutung. Wir werden uns hier auf elektrisch nichtleitende und ungeladene Flüssigkeiten beschränken.

Die Grundbausteine magnetisch polarisierbarer Substanzen sind die atomaren Momente von der Größenordnung des Bohrschen Magnetons μ_B . Gegenüber dem Spin- oder Bahnmoment des Elektrons ist das Kernmoment und das induzierte diamagnetische Moment vernachlässigbar klein, denn sie sind um das Massenverhältnis von Elektronen und Protonen bzw. um das Drehimpulsverhältnis von Bahnpräzession und Elektronenspin kleiner. Aber auch das Bohrsche Magneton μ_B ist zu klein, um bei Raumtemperatur selbst in den größten erreichbaren Feldstärken eine nennenswerte Ausrichtung des thermisch fluktuierenden Momentes zu bewirken. Im Mittel ist etwa ein Drittel der Momente ausgerichtet, wenn die magnetische Energie gleich der thermischen Energie ist:

$$n \mu_B B = k_B T. \quad (3.1)$$

n bezeichnet die Zahl der Bohrschen Magnetonen μ_B pro Atom, B die magnetische Flußdichte, k_B die Boltzmannkonstante und T die absolute Temperatur. Für $n=1$ müßte die Flußdichte bei $T=300\text{K}$ etwa 300 Tesla betragen. Die einzige Möglichkeit, um bei Raumtemperatur und mäßigen Feldstärken in den Sättigungsbereich zu gelangen, besteht in der Vergrößerung der Zahl n kohärenter Momente durch eine ferro- oder ferrimagnetische Austauschwechselwirkung. Obwohl die ferromagnetische Fernordnung nicht an die Bedingung gitterperiodischer Festkörper geknüpft zu sein scheint (Gruber & Griffith 1986), kennt man keine ferromagnetischen Flüssigkeiten. Bei allen ferromagnetischen Substanzen liegt die Curie-Temperatur deutlich unterhalb der Schmelztemperatur. Suspensioziert man aber magnetische Einbereichsteilchen, so wird es möglich,

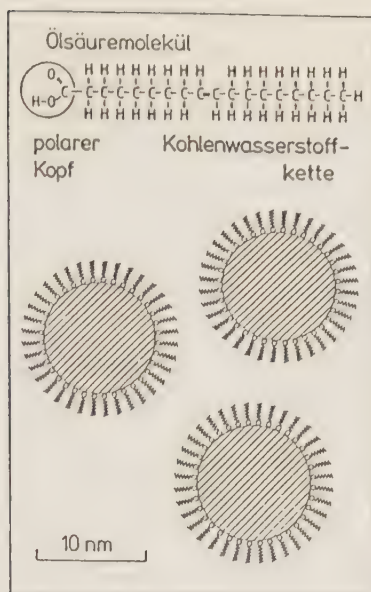
die ferromagnetische Austauschwechselwirkung mit den Flüssigkeitseigenschaften zu verbinden. Die Magnetisierung wird dann nur noch durch die Forderung von Stabilität und Fließfähigkeit begrenzt. Die Fließfähigkeit von Suspensionen geht verloren, wenn die kolloidalen Teilchen dicht gepackt, also unbeweglich, sind. Als obere Schranke für die Volumenkonzentration φ erhält man unter der Annahme dichtester Kugelpackung $\varphi=0,74$. Aber schon für $\varphi>0,2$ gibt es nichtnewtonisches Verhalten wie Scherverdickung oder Scherverdünnung (Scholten 1983).

1963 gelang es Papell (1963) erstmals, stabile Suspensionen magnetischer Einbereichsteilchen herzustellen, deren Moment das 10- bis 100-tausendfache von μ_B erreichte, die dann von Rosensweig et al. (1965) weiterentwickelt wurden. Inzwischen existiert eine Fülle von Trägerflüssigkeiten und Dispergierungsmitteln für Kolloide aller magnetischen Werkstoffe, für die sich die Bezeichnung Ferrofluide durchgesetzt hat. Neben zahlreichen hydrodynamischen Instabilitäten, z.B. Rayleigh-Taylor-Instabilität und Labyrinth-Instabilität, finden Ferrofluide heute vor allem dort technische Verwendung, wo die spezifischen Flüssigkeitseigenschaften, nämlich Formanpassung und Fließfähigkeit, zusammen mit der Möglichkeit des Fixierens mit magnetischen Kräften, gebraucht werden. Beispiele dafür sind magnetische Staabdichtungen, Vakuum-Durchführungen und Lautsprecherkühlungen oder -dämpfungen. Ferrofluide ermöglichen eine konkurrenzlos einfache Handhabung, indem zu ihrer Fixierung, im Gegensatz etwa zu dielektrischen Flüssigkeiten, weder Isolierungen noch Versorgungs-, Steuer- oder Regelgeräte benötigt werden.

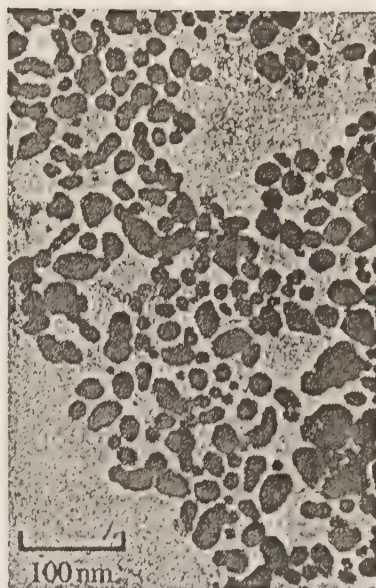
3.1 Herstellung und Zusammensetzung

Allgemeine Übersichten für die zahlreichen Ferrofluide und ihre Fertigungsverfahren geben Charles & Popplewell (1980) und Rosensweig (1985). Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung des Herstellungsprozesses des für die Experimente ausgewählten Ferrofluids von der Firma Ferrofluidics Corporation und führen seine Zusammensetzung als Standard für die nachfolgenden Abschätzungen ein.

Das verwendete Ferrofluid war, wie das erste von Papell hergestellte, eine Suspension von Magnetitteilchen (Fe_3O_4) in Kerosin als Trägerflüssig-



3.1a



3.1b

Bild 3.1 Schematische Darstellung der mit Ölsäure beschichteten Magnetitteilchen (a). Teilbild (b) zeigt eine elektronenmikroskopische Aufnahme der Magnetitteilchen eines Ferrofluids aus Rosensweig (1986).

keit. Die kolloidale Größe von etwa 10 nm im Durchmesser wird durch Vermahlen von Magnetit und anschließendes Zentrifugieren erreicht. Die Radien der nahezu kugelförmigen Teilchen (siehe Bild 3.1b) sind auf logarithmischer Skala normalverteilt. Um Klumpenbildung zu vermeiden, muß der Mahlprozess in Gegenwart von oberflächenaktiven Substanzen erfolgen. Als solche eignen sich bei Kerosin als Trägerflüssigkeit Ölsäuremoleküle ($C_{18}H_{34}O_2$), deren polares Ende, die Carboxylgruppe $COOH$, an der Oberfläche der Teilchen haftet. Ihre langen Kohlenwasserstoffketten besitzen dagegen eine stärkere Affinität zur Trägerflüssigkeit und ragen deshalb senkrecht zur Teilchenoberfläche nach außen, wodurch sie einen elastischen Puffer von ca. 2 nm Dicke zwischen den Teilchen bilden (siehe Bild 3.1a). In Tabelle 3.1 sind die Herstellerangaben für das verwendete Ferrofluid zusammengestellt.

Die Magnetitteilchen sind Einbereichspartikel, denn ihre magnetische Energie ist zu klein, um gegen die Austauschwechselwirkung Domänenwände ausbilden zu können, und die Magnetisierung ist starr an das Teilchen gebunden, denn die magnetische Anisotropie ist zu groß, um durch thermische Anregungen überwunden zu werden (Lambrick et al. 1988). Für das magnetische Moment m eines Teilchens mit 10 nm Durchmesser ergibt sich somit aus der Sättigungsmagnetisierung von Magnetit der Wert $m \approx 25000 \mu_B$. Den magnetischen Volumenanteil von $\varphi = 6,7\%$ erhält man aus dem Verhältnis der Sättigungsmagnetisierungen von Ferrofluid und Magnetit. Dies entspricht einem mittleren Abstand von etwa zwei Teilchendurchmessern, sofern man die Partikel auf einem einfach kubischen Gitter anordnet.

Stoffgröße	Wert
Sättigungsmagnetisierung	$31,8 \cdot 10^3 \text{ A/m}$
Dichte	$1,25 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
dynamische Viskosität (27 °C)	$5 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$
kinematische Viskosität (27 °C)	$4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Schmelztemperatur	7 °C
Siedetemperatur	70 °C
Anfangssuszeptibilität	0,8
Oberflächenspannung	$28 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Wärmeleitfähigkeit	$0,145 \text{ W/K}\cdot\text{m}$
Temperaturleitzahl	$8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$
spezifische Wärme	$1,47 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$
Volumenausdehnungskoeffizient	$8,6 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$
Sättigungsmagn. von Magnetit	$4,77 \cdot 10^5 \text{ A/m}$
Dichte von Magnetit	$5,24 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
$-(dM/dT)/M$ von Magnetit	$6,1 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$

Tabelle 3.1 Herstellerangaben der Firma Ferrofluidics Corporation für das verwendete Ferrofluid mit der Bezeichnung EMG 905. Zum Vergleich wurden die Daten für Magnetit mitangeführt (aus Landoldt & Börnstein).

3.2 Stabilität

Die Beständigkeit der physikalischen Eigenschaften eines Fluids ist eine der Grundvoraussetzungen für die Reproduzierbarkeit von Messungen. In mehrkomponentigen Systemen wie in Ferrofluiden können Irreversible Veränderungen durch Reaktionen der einzelnen Komponenten untereinander oder Konzentrationsverschiebungen aufgrund von Diffusion in äußeren Feldgradienten auftreten. Zwar lassen sich auch solche Erscheinungen im Rahmen der Hydrodynamik behandeln, indem man die Diffusions- und Reaktionsgleichungen aller Komponenten hinzuzieht (z.B. double-diffusive convection), aber die zunehmende Komplexität der Bewegungsgleichungen würde die charakteristischen Eigenschaften der thermischen Konvektion verdecken. Inwieweit das einkomponentige Bild für Ferrofluide, das wir verwenden werden, gerechtfertigt ist und wodurch es bewahrt werden kann, sollen die folgenden Überlegungen zeigen.

Zwischen den Teilchen eines Ferrofluids wirken drei Kräfte: Die räumliche Abstoßung durch eine nichtmagnetische Polymerhülle, die Van der Waals Wechselwirkung und magnetische Kräfte. Bei den ersten beiden handelt es sich um kurzreichweitige Zentralkräfte. Für ein stabiles Ferrofluid muß die Dicke der Polymerhülle die Reichweite der Van der Waals Attraktion übertreffen, sodaß ihre Summe durch eine abstoßende Zentralkraft mit kurzer Reichweite beschrieben werden kann. Die magnetischen Dipolkräfte sind langreichweitig und von der relativen Orientierung der Momente abhängig. In Magnetisierungsrichtung ziehen sich die Teilchen an und senkrecht dazu stoßen sie sich ab. Aufgrund der anisotropen Wechselwirkung neigen die suspendierten Teilchen dazu, sich in Ketten parallel zur Feldrichtung anzuordnen. Die mittlere Teilchenzahl n pro Kette beträgt unter der Annahme kleiner Volumenkonzentration ϕ und starker Kopplung ($\zeta \gg 1$) nach De Gennes & Pincus (1970):

$$n = \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\phi}{\zeta^2} e^{2\zeta}\right)^{-1}. \quad (3.2)$$

Da das Verhältnis von magnetischer und thermischer Energie zweier sich berührender Partikel, die Kopplungskonstante

$$\zeta = \frac{m^2}{32 \pi r^3 \mu_0 k_B T}, \quad (3.3)$$

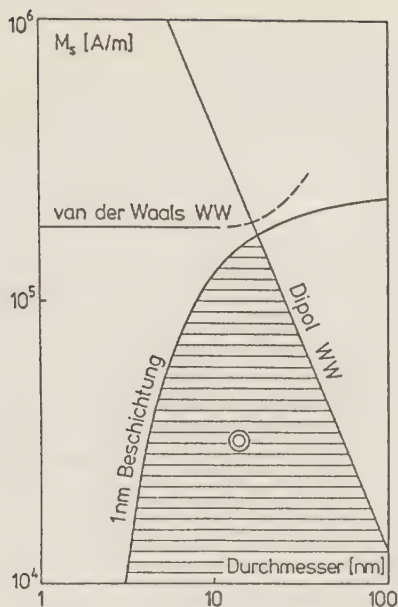
für das magnetische Moment m von Magnetitteilchen mit 5nm Radius bei Raumtemperatur nur wenig größer als eins ist, kann der Erwartungswert $n=1,3$ für die Kettenlänge nur als obere Schranke betrachtet werden. Ohne die Einschränkungen $\varphi \ll 1$ und $\zeta \gg 1$ zu verwenden, berechnete Scholten (1983) die Stabilitätsgrenze bezüglich der magnetischen Anziehungskräfte, indem er die freie Energie von Kolloiden und beliebigen Aggregaten für den ungünstigsten Fall vollständiger Ausrichtung der Momente verglich. Wie in Diagramm 3.2a dargestellt, wird der Teilchendurchmesser bei konstantem Volumenanteil φ (d.h. bei konstanter Sättigungsmagnetisierung) nach oben aufgrund der Dipolwechselwirkung und nach unten aufgrund des mit der Gesamtoberfläche zunehmenden Raumbedarfs der Polymerhülle begrenzt. In dem dazwischen liegenden Bereich sind die magnetischen Momente klein genug, um Teilchenaggregation durch Brownsche Bewegung zu verhindern, aber groß genug, um in mäßig starken Feldern ausgerichtet werden zu können. Der letzten Eigenschaft verdanken Ferrofluide ihre technische Bedeutung, denn sie erlaubt es, auf konzentrierte Ferrofluide magnetische Kräfte auszuüben, die mit der Schwerkraft vergleichbar sind, ohne die Fließfähigkeit zu zerstören. Das verwendete Ferrofluid erfüllt die Stabilitätsbedingungen und vergleichbare Ferrofluide erwiesen sich über Jahre als stabil (Tari et al. 1979). Eventuelle Ausflokungen lassen sich durch Sedimentation im Schwerfeld und anschließendes Dekantieren beseitigen.

Die bisherigen Betrachtungen beschränkten sich auf das thermische Gleichgewicht und es wurde gezeigt, daß Reaktionen der Komponenten untereinander keine Rolle spielen. Das Gleichgewicht wird durch äußere Kräfte oder Temperaturgradienten gestört, als deren Folge Transportprozesse einsetzen. Die phänomenologischen Gleichungen, die den Wärmestrom J_Q und den Teilchenstrom J_φ mit den Gradienten der Temperatur T , der Konzentration φ und der Feldstärke H verknüpfen, lauten im Grenzfall kleiner Konzentration (Callen 1960)

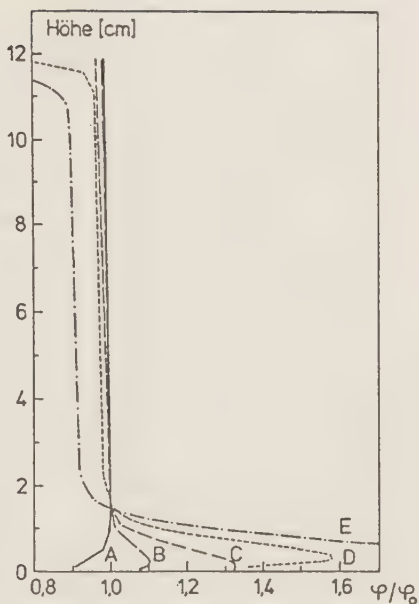
$$J_Q = -k \nabla T \quad \text{und} \quad (3.4a)$$

$$J_\varphi = -D (\nabla \varphi - k_T \varphi \nabla T - \frac{\mu_0 \varphi}{k_B T} (m \cdot \nabla) H) \quad (3.4b)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit k , der Diffusionskonstanten D und dem Soret-



3.2a



3.2b

Diagramm 3.2 Zur Stabilität von Ferrofluiden.

a) Obere Grenzwerte der Sättigungsmagnetisierung M_s für eine stabile Suspension magnetischer Teilchen als Funktion der Partikeldurchmesser (nach Scholten 1983). Der Kreis im stabilen, durch Schraffur gekennzeichneten Bereich beschreibt die Lage des verwendeten Ferrofluids.

b) Teilchensedimentation in einem Feldgradient $\partial_z H = 4 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$. Das Konzentrationsprofil wurde aus der Verschiebung der Resonanzfrequenz einer Induktionsspule bestimmt. Kurve (A) wurde vor dem Anlegen des Feldgradienten gemessen und (B), (C), (D) und (E) jeweils 100, 370, 850 und 1900 Stunden nachher (nach Peterson & Krüger 1977).

Koeffizienten k_T . Der Einfluß der Schwerkraft auf den Teilchenstrom J_Φ ist um mehr als eine Größenordnung kleiner als typische magnetische Kräfte und wurde deshalb weggelassen. Mit Hilfe des Stokesschen Gesetzes kann die Mobilität der Teilchen abgeschätzt werden und zusammen mit der Einstein-Relation erhält man für die Diffusionskonstante mit den Werten von

Tabelle 3.1 bei Raumtemperatur

$$D = k_B T \cdot \text{Beweglichkeit} = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Die entsprechende Größe für Ausgleichsvorgänge der Temperatur durch Diffusion, die Temperaturleitzahl α , beträgt

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} \approx 7,9 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

wobei für die Dichte ρ , die spezifische Wärme C und die Wärmeleitfähigkeit k wieder die Werte von Tabelle 3.1 verwendet wurden. Aufgrund der verhältnismäßig kleinen Teilchendiffusivität D in Flüssigkeiten trägt der Feld- und Konzentrationsgradient (Dufour-Effekt) und der Teilchentransport nicht zum Wärmestrom bei, der deshalb auch in Suspensionen vom Fourierschen Gesetz (3.4a) beschrieben wird. Die inverse Thermodiffusion, der Soret-Effekt, bildet dagegen zusammen mit dem Feldgradienten die treibende Kraft für Teilchendriften gegenüber dem ausgleichenden Term der Mischungsentropie. Gerade wegen der kleinen Diffusivität D beeinflussen von Konzentrationsschwankungen verursachte Dichte- und Magnetisierungsunterschiede die Stabilität einer ruhenden Flüssigkeitsschicht erheblich, denn sie werden wesentlich langsamer ausgeglichen als thermisch induzierte Unterschiede (Hurle & Jakeman 1971). Der Wert des Soret-Koeffizienten k_T ist für Ferrofluide nicht bekannt. Experimente von Blums et al. (1983) zeigen jedoch, daß die Thermodiffusion im allgemeinen dem Betrag nach kleiner als die Magneto-diffusion und dieser entgegengerichtet ist. Zur Abschätzung der Obergrenzen für die Konzentrationsunterschiede genügt es deshalb, nur den dominierenden Beitrag der magnetischen Kräfte zu berücksichtigen. Als Endzustand, charakterisiert durch verschwindenden Teilchenstrom, folgt mit (3.4b)

$$\frac{1}{\varphi} \nabla \varphi = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{H}}{k_B T}, \quad (3.5)$$

d.h., die relative Änderung der Konzentration in einem typischen Feldgradienten $\partial_z H = 10^6 \text{ A/m}^2$ beträgt etwa 10% pro Millimeter. In Schichtdicken von 1 mm bis 4 mm, wie sie im Experiment (Kap. 6) verwendet werden, sind Gradienten dieser Größenordnung sicher nicht vernachlässigbar. Aber es besteht die Möglichkeit, sie zu verhindern, indem man die Diskrepanz

von fast vier Größenordnungen zwischen den Einstellzeiten für den stationären Zustand von Temperatur- und Konzentrationsverteilung ausnutzt (vgl. Diagramm 3.2b). Die kritische Temperaturdifferenz ΔT_c kann infolgedessen erreicht werden, lange bevor die Teilchendiffusion zu merklichen Inhomogenitäten führt, und die einsetzende thermische Konvektionsströmung sorgt für weitere Durchmischung der Suspension und damit für Homogenisierung der Konzentration, sofern die Strömungsgeschwindigkeit deutlich größer als die Driftgeschwindigkeit ist. Aus dem Vergleich der beiden Geschwindigkeiten (vgl. Kap 5.5 für v_{Kon})

$$v_{Kon} \approx 10^{-1} \frac{mm}{s} \cdot \epsilon > 10^{-5} \frac{mm}{s} \approx v_{Drift}$$

folgt, daß die Konvektionsamplitude $\epsilon \sim \sqrt{(\Delta T - \Delta T_c) / \Delta T_c}$ größer als 10^{-3} bzw. die reduzierte Temperaturdifferenz größer als 10^{-6} sein muß. Prozesse, die sich bei so kleinen Amplituden abspielen, treten gegenüber anderen Meßfehlern in den Hintergrund, weshalb wir Ferrofluide als homogen annehmen werden. Erst wenn, wie in binären Mischungen, die Lewis-Zahl D/x , um einen Faktor 100 größer ist, wird die Konkurrenz zwischen Teilchendrift und thermischer Konvektion in der Umgebung des kritischen Punktes meßbar (Moses & Steinberg 1986). Sie äußert sich durch periodische Geschwindigkeitsumkehr von ortsfesten Konvektionsrollen. Die oszillatorische Konvektion wird mit zunehmender Amplitude von einem Zustand fortschreitender Konvektionsrollen abgelöst (Kolodner et al. 1986). Auf diese Weise wird die Homogenität der Teilchenkonzentration aufrechterhalten, denn die fortschreitenden Konvektionsrollen erfassen nach und nach jeden Bereich der Fluidschicht. Der konvektive Wärmestrom und die Wellenlänge unterscheiden sich praktisch nicht von denjenigen stehender Konvektionsrollen. Die Phasengeschwindigkeit wird im wesentlichen vom Verhältnis thermisch induzierter und konzentrationsinduzierter Dichteunterschiede bestimmt, das als Separationsverhältnis Y bezeichnet wird. Wenn wir die Teilchendrift durch den Soret-Effekt in (3.4b) gegenüber dem magnetischen Beitrag vernachlässigen, erhalten wir für das magnetische Separationsverhältnis als Funktion des Teilchenmomentes m , der Feldstärke H und der Temperatur:

$$Y = - \frac{\mu_0 m H}{k_B T}.$$

Im Experiment nahm Y Werte zwischen 0 und -0,7 an.

3.3 Zustands- und Transportgleichungen

Die neue Zustandsgröße in magnetischen Flüssigkeiten ist die Dipoldichte M . Da wir die räumliche Verteilung der Dipole als konstant voraussetzen können, wird ihr Zustand und der von Ihnen bewirkte Transport allein von der Verteilung f bzw. der Rotation Ω Ihrer Orientierungen $\mathbf{e}$ gegenüber der Wirbelstärke $\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ in der Flüssigkeit bestimmt. Zustands- und Transportgrößen wie z.B. die Teilchendichte oder die Wärmeleitfähigkeit, die nicht an die Orientierung $\mathbf{e}$ und deren Bewegung gekoppelt sind, erfahren beim Übergang zu dipolaren Medien keine Änderung und bleiben deshalb in diesem Paragraphen unberücksichtigt.

Die Verteilung $f(\mathbf{e})$ hängt wie die Rotation Ω von der Temperatur T , der Feldstärke H und der Wirbelstärke ω ab. Der Erwartungswert $\langle \mathbf{e} \rangle$ liefert sowohl die Magnetisierung als Funktion der Temperatur und des Magnetfeldes als auch den magnetischen Beitrag zur Inneren Energie, der für Temperaturänderungen durch das Feld verantwortlich ist. Der Unterschied der mittleren Teilchenrotation Ω zur lokalen Wirbelstärke ω der Trägerflüssigkeit äußert sich in zusätzlicher Dissipation, die in Form einer Rotationsviskosität beschreibbar ist.

Im Folgenden soll die Größenordnung der für das Experiment relevanten Parameter zunächst unter der vereinfachten Annahme verschwindender Wechselwirkung zwischen den Teilchen abgeschätzt werden. Die Abschätzung ermöglicht die Konzeption von Experimenten und begründet die verwendeten Näherungen, liefert aber keine hinreichend zuverlässigen Angaben zur quantitativen Auswertung von Meßergebnissen. Diese Anforderungen können aber aufgrund der langfristigen Veränderungen durch Konglomeratlon und Sedimentation auch Herstellerangaben oder unabhängige Einzelmessungen der Materialgrößen nicht erfüllen. Um Relativmessungen zu ermöglichen, muß die Feldstärkeabhängigkeit der Materialgrößen in einem zweiten Schritt genauer analysiert werden. Für das verwendete Feldstärkeintervall wird eine einfache Näherung angegeben.

Auf ein kugelförmiges Magnetitteilchen mit dem Volumen $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, dessen magnetisches Moment $m = e \cdot M_{Fe_3O_4} \cdot V$ Infolge magnetischer Anisotropie starr an das Teilchen gebunden ist, wirkt im Magnetfeld H das magnetische Drehmoment

$$\mu_0 m \times H,$$

das das Teilchen an der freien Rotation mit der Wirbelstärke ω der umgebenden Flüssigkeit hindert. Aufgrund der Viskosität der Trägerflüssigkeit verursacht die Differenz zwischen Teilchenrotation Ω und lokaler Wirbelstärke ω ein hydrodynamisches Drehmoment (Jeffreys 1922)

$$-6\eta_0 V(\Omega - \omega).$$

Die thermischen Anregungen der Rotationsfreiheitsgrade lassen sich in Form eines Brownschen Drehmoments

$$-k_B T \mathbf{e} \times \nabla_{\mathbf{e}} \log(f)$$

beschreiben, dessen Bestreben es ist, Inhomogenitäten der Orientierungsverteilung auszugleichen ($\nabla_{\mathbf{e}}$ bezeichnet den Gradienten im Orientierungsraum). Für Teilchen im nm-Bereich ist das Trägheitsmoment verschwindend klein, weshalb sich wegen der Drehimpulserhaltung magnetisches, hydrodynamisches und Brownsches Moment gegenseitig aufheben müssen. Damit folgt die der Teilchendrift j_{φ} im Ortsraum (Glg. (3.4)) entsprechende Gleichung für die Teilchendrift $j_r = (\Omega \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{f}$ im Orientierungsraum

$$j_r = f \frac{\mu_0 m H}{6\eta_0 V} (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{e} + f \omega \times \mathbf{e} - D_r \nabla_{\mathbf{e}} f, \quad (3.6)$$

wobei D_r den Koeffizienten für die Rotationsdiffusivität bezeichnet, der gemäß der Stokes-Einstein-Relation die Form

$$D_r = \frac{k_B T}{6\eta_0 V}$$

hat. Da der Orientierungsraum abgeschlossen ist, muß als einzige Randbedingung die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt werden

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{j}_r = 0. \quad (3.7)$$

Gleichung 3.6 in die stationäre Kontinuitätsgleichung ($\partial f / \partial t = 0$) eingesetzt, liefert die nichtlineare Differentialgleichung für die Orientierungsverteilung

$$\nabla_{\mathbf{e}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} + \lambda (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{e}) - Pe^{-1} \nabla_{\mathbf{e}}^2 f = 0, \quad (3.8)$$

in die nur noch die dimensionslosen Verhältnisse von hydrodynamischem und Brownschem Moment, die Péclet-Zahl

$$Pe = \frac{6\eta_0 V \omega}{k_B T},$$

von magnetischem und hydrodynamischen Moment

$$\lambda = \frac{\mu_0 m H}{6\eta_0 V \omega},$$

von magnetischem und Brownschem Moment

$$\alpha = \frac{\mu_0 m H}{k_B T},$$

und der Winkel γ zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und der Feldrichtung $\mathbf{h}$ eingehen.

Die Viskosität η einer Suspension kugelförmiger Teilchen nimmt auch ohne die Einschränkung der Beweglichkeit durch das Magnetfeld mit der Volumenkonzentration zu. Bei kleiner Konzentration ist der Anstieg linear und unabhängig von der Teilchengröße (Einstein 1905)

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{5}{2} \varphi\right). \quad (3.9)$$

η_0 ist die Viskosität der Trägerflüssigkeit einschließlich des zur Sta-

bilisierung nötigen Überschusses an Ölsäure (Jones 1988). Überschreitet die Konzentration ungefähr 10%, dann kommen als Folge der einsetzenden hydrodynamischen Wechselwirkung quadratische Beiträge dazu und bei $\varphi > 30\%$ wächst die Viskosität steil an und wird von der Scherrate abhängig (Scholten 1983). Die nichtlineare Viskositätszunahme ist abhängig von der Teilchengröße, denn kleine Teilchen beanspruchen, gemessen an ihrem Volumen, mehr Raum für die Brownsche Bewegung. Ein universelles Gesetz wie (3.9) gilt nur im Limes kleiner Konzentrationen. Für diesen Grenzfall, der Gleichung 3.8 zugrunde liegt, berechneten Brenner & Welssman (1972) die Verteilung f und die mittlere Rotation numerisch für verschiedene Bereiche der Parameter Pe , λ bzw. α . Die sich daraus ergebenden Werte für die Viskositätszunahme im Feld, die Rotationsviskosität ξ , und für die Magnetisierung M zusammen mit dem Winkel ϑ , den M mit der Feldrichtung h einschließt, sind in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

vorherrschendes Moment	$\xi/(\varphi \cdot \eta_0)$	$M/(\varphi \cdot M_{Fe_3O_4})$	ϑ
Brownsches Moment ($Pe \ll 1$, $\alpha \ll 1$)	$\alpha^2/4$	$\alpha/3$	0
magnetisches Moment ($\lambda \gg 1$, $\alpha \gg 1$)	3/2	1	0
hydrodynamisches Moment ($Pe \gg 1$, $\lambda \ll 1$)	λ^2	$2 \cdot \lambda/3$	$\pi/2$

Tabelle 3.2 Rotationsviskosität ξ , Magnetisierung M und Winkel ϑ zwischen Teilchenmoment und Feld als Funktion von Pe , λ und α . Alle Werte beziehen sich auf $\gamma = 90^\circ (\omega \perp h)$.

Im Fall dominierenden hydrodynamischen Momentes ($Pe \gg 1$) hängt sowohl die Magnetisierung als auch die Rotationsviskosität von der Scherrate ω ab, d.h. das Ferrofluid verhält sich für $Pe \gg 1$ nichtnewtonisch. Große Péclet-Zahlen werden allerdings für Teilchen im nm-Bereich nur für unrealistisch große Werte der Wirbelstärke erreicht. Bei thermischer Konvektion überschreitet die Wirbelstärke üblicherweise den Wert $\omega = 1/s$ nicht, woraus für die Péclet-Zahl $Pe < 10^{-6} \ll 1$ folgt. Shliomis (1972) linearisierte die Gleichung (3.8) mit der Annahme $Pe \ll 1$ und fand für die Rotationsviskosität und die Magnetisierung die analytischen Lösungen (vgl. Diagramm 3.3):

$$\xi = \varphi \eta_0 \frac{3}{2} \frac{\alpha - \tanh(\alpha)}{\alpha + \tanh(\alpha)} \sin^2(\gamma), \quad (3.10a)$$

$$M = \varphi M_{Fe_3O_4} (\coth(\alpha) - \alpha^{-1}) ; \vartheta = 0, \quad (3.10b)$$

deren Grenzverhalten für $\alpha \ll 1$ bzw. $\alpha \gg 1$ mit den numerischen Ergebnissen von Brenner & Weissman (1972) übereinstimmt. Mit der Rotationsviskosität ξ beträgt der Effektivwert der Viskosität eines Ferrofluids

$$\eta = \eta_0 \left(1 + \frac{5}{2} \varphi + \frac{3}{2} \varphi \frac{\alpha - \tanh(\alpha)}{\alpha + \tanh(\alpha)} \sin^2(\gamma) \right), \quad (3.10c)$$

der zwar nicht vom Betrag der Scherrate ω , wohl aber vom Winkel γ zwischen ω und H abhängt. Insofern ist die Viskosität auch im Limes kleiner Péclet-Zahlen nichtnewtonisch. Wenn γ zwischen 0° und 90° liegt, wird der Einfluß des magnetischen Drehmomentes auf das Fließverhalten mit der effektiven Viskosität nur unvollständig beschrieben. Weitere Beiträge zum Spannungstensor können sekundäre Strömung (Leal 1971) oder Strömungsinstabilitäten (Vislovich et al. 1984) verursachen. Da bei der einsetzenden Konvektion ω senkrecht zur dominierenden Komponente der Feldstärke ist, beschränken wir uns im folgenden auf $\gamma = 90^\circ$.

Die zweite Gleichung (3.10b), die den klassischen Paramagnetismus beschreibt, läßt sich mit den Definitionen $M_s = \varphi \cdot M_{Fe_3O_4}$ für die Sättigungsmagnetisierung, $H_s = k_B T / (\mu_0 \cdot V \cdot M_{Fe_3O_4})$ und $L(\alpha) = \coth(\alpha) - 1/\alpha$ auf die kompakte Form

$$M/M_s = L(H/H_s) \quad (3.10d)$$

bringen, wobei die das Ferrofluid charakterisierenden Größen, die Konzentration φ und das Teilchenvolumen V , in M_s bzw. H_s enthalten sind. Bei $H=H_s$ erreicht das Ferrofluid ungefähr ein Drittel seiner Sättigungsmagnetisierung M_s . Vollständige Ausrichtung der Momente erfolgt erst im Limes $H \gg H_s$. Bei Raumtemperatur betragen M_s und H_s für unser Standardferrofluid $31,8 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ bzw. $13,3 \cdot 10^3 \text{ A/m}$. Mit den charakteristischen Werten M_s und H_s sowie den Gleichungen (3.10) lassen sich die Größenordnungen der für thermische Konvektion relevanten von θ abhängigen Parameter abschätzen (siehe Tabelle 3.3).

Die bisherigen Abschätzungen der Zustands- und Transportgrößen basierten auf der Annahme wechselwirkungsfreier Teilchen mit schmaler Größenverteilung. Im Fall der hydrodynamischen Wechselwirkung war die Annahme berechtigt, denn die Reichweite der hydrodynamischen Wechselwirkung ist bis zu einem Volumenanteil von etwa 20% kleiner als der mittlere Abstand zwischen zwei Teilchen. Für die langreichweitige Dipolwechselwirkung, deren Paarenergie mit der dritten Potenz des reziproken Abstands abnimmt, trifft dies dagegen nicht zu. Wäre die Wechselwirkung isotrop, dann würde die Wechselwirkungsenergie eines Teilchens mit seiner Umgebung unabhängig von der Konzentration mit zunehmendem Volumen divergieren. Die Divergenz wird zwar aufgrund der Anisotropie verhindert, aber jeder noch so ferne Bereich trägt zur magnetischen Wechselwirkung bei. Entfernte Dipole können in ihrer Wirkung durch ihre Mittelwerte ersetzt werden (Kontinuumsnäherung). Die Approximation für kleine Teilchenkonzentration besteht nun in der Annahme, daß auch benachbarte Momente für die Kontinuumsnäherung hinreichend weit voneinander entfernt sind. Wenn die Teilchen, wie angenommen, auch isotrop verteilt sind, dann läßt sich die magnetische Wechselwirkung in Form des Lorentz-Feldes $H_L = M/3$ berücksichtigen, das in einem kugelförmigen Hohlraum eines homogen magnetisierten Mediums herrscht. Zusammen mit dem lokalen Feld der Kontinuumsnäherung erhalten wir für die magnetische Zustandsgleichung anstelle von (3.10d)

$$M/M_s = L(H/H_s + \frac{1}{3} M/H_s), \quad (3.11)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Zustandsgleichung (3.11) auch im Feld $H=0$ von Null verschiedene Lösungen für M zuläßt, wenn $H_s < M_s/9$ gilt. Mit der Annäherung an diesen Grenzfall wird jedoch die Voraussetzung für die Molekularfeldtheorie verletzt. Auch das Fließverhalten läßt sich dann nicht mehr mit den beiden Koeffizienten der Scher- und Rotationsviskosität erfassen (Hess 1987) und die Fluktuationen der Orientierung und des Abstandes benachbarter Momente müssen zur Berechnung der Magnetisierung berücksichtigt werden. Da für das verwendete Ferrofluid $H_s > M_s/3$ gilt, findet die gemachte Näherung hier indirekte Bestätigung.

Eine weitere Modifikation der magnetischen Zustandsgleichung wird von der Größenverteilung der Magnetitpartikel verursacht. Die großen Teilchen bestimmen im wesentlichen den Anstieg von M für $H < H_s$, während die kleinen Teilchen für die Annäherung von M an den Sättigungswert M_s für $H > H_s$ verantwortlich sind. Aus dem Verlauf der Magnetisierungskurve in den beiden Grenzfällen läßt sich für eine angenommene Normalverteilung, wie Chantrell et al. (1978) zeigten, der Mittelwert und die Standardabweichung eindeutig berechnen. Beschränkt man sich jedoch auf einen der beiden Bereiche, dann kann der Einfluß der Polydispersität in erster Näherung vernachlässigt werden. Außerdem ermöglicht die implizite Gleichung (3.11) die Magnetisierung in Form einer Potenzreihe in H/H_s bis zur dritten Ordnung zu approximieren:

$$M/M_s = 0,454 H/H_s - 0,065 (H/H_s)^3. \quad (3.12)$$

Mit Gleichung (3.12), die die magnetische Wechselwirkung und die für $H < H_s$ relevanten nichtlinearen Beiträge zur Zustandsgleichung enthält, wurden die verbesserten Werte und die quadratischen Terme in Tabelle 3.3 berechnet. Dabei wurde zur Berechnung der pyromagnetischen Konstante der thermische Ausdehnungskoeffizient γ und die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung von Magnetit (siehe Tabelle 3.1) bei Raumtemperatur mitberücksichtigt. Der vernachlässigbare magnetokalorische Effekt rechtfertigt eine Korrektur nicht und die Rotationsviskosität wird ihrerseits bereits als Korrektur zur effektiven Viskosität aufgefaßt.

Da die jeweiligen quadratischen Korrekturen in Tabelle 3.3 klein sind, können Potenzprodukte dieser Größen wie z.B. die magnetische Rayleigh-Zahl ebenso mit einem quadratischen Korrekturterm bezüglich der Feldstärke approximiert werden, und wenn man sich auf Relativmessungen beschränkt, braucht man die Absolutwerte der Vorfaktoren nicht zu kennen. Der dominierende Beitrag der nichtlinearen Korrekturen kommt von der pyromagnetischen Konstante, der umso schwerer wiegt, als er quadratisch in die magnetische Rayleigh-Zahl eingeht (siehe Diagramm 3.4). Demgegenüber kann die Viskosität und die Permeabilität als unabhängig vom Magnetfeld betrachtet werden. Die Permeabilitätsverhältnisse $I=(1+\chi^{(tot)})/(1+\chi)$ und $J=(1+\chi^{(ex)})/(1+\chi)$ erhalten mit der mittleren Suszeptibilität $\chi=1$ die Werte $I=1$ bzw. $J=1/2$ ($\chi^{(tot)}$ bezeichnet die totale Suszeptibilität des Ferrofluids und $\chi^{(ex)}$ bezeichnet die Suszeptibilität des Mediums außerhalb des Ferrofluids). Mit $\chi=\chi^{(tot)}=1$ vereinfacht sich auch der Zusammenhang zwischen äußerem und lokalem Feld für eine ebene Ferrofluidschicht senkrecht zur z-Achse auf

$$H_z = \frac{1}{2} H_z^{(ex)} \text{ und } H_{x,y} = H_{x,y}^{(ex)}. \quad (3.13)$$

Materialgröße	Definition	Größenordnung ($H < H_s$)	verbesserter Wert ($H < H_s$)	quadratischer Korrekturfaktor ($H < H_s$)
pyromagnetische Konstante K	$-\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$	$35 \text{ A/(K}\cdot\text{m)} \cdot H/H_s$	$70 \text{ A/(K}\cdot\text{m)} \cdot H/H_s$	$(1-0,34 \cdot (H/H_s)^2)$
magnetokalorischer Effekt	$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S$	$2 \cdot 10^{-8} \text{ K}\cdot\text{m/A}$	—	—
differentielle Suszeptibilität χ	$\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T$	0,8	1,09	$(1-0,43 \cdot (H/H_s)^2)$
Inneres Permeabili- tätsverhältnis I	$\frac{1+\chi^{(tot)}}{1+\chi}$	$1 \leq I \leq 2$	1,0	$(1+0,15 \cdot (H/H_s)^2)$
äußeres Permeabili- tätsverhältnis J	$\frac{1}{1+\chi}$	$1/2 \leq J \leq 1$	0,48	$(1+0,22 \cdot (H/H_s)^2)$
reduzierte Rotationsviskosität	ξ/η_0	$0,02 \cdot (H/H_s)^2$	—	—

Tabelle 3.3 Aus den Zustandsgleichungen (3.10) bzw. (3.12) abgeleitete Materialgrößen für das Standardferrofluid.

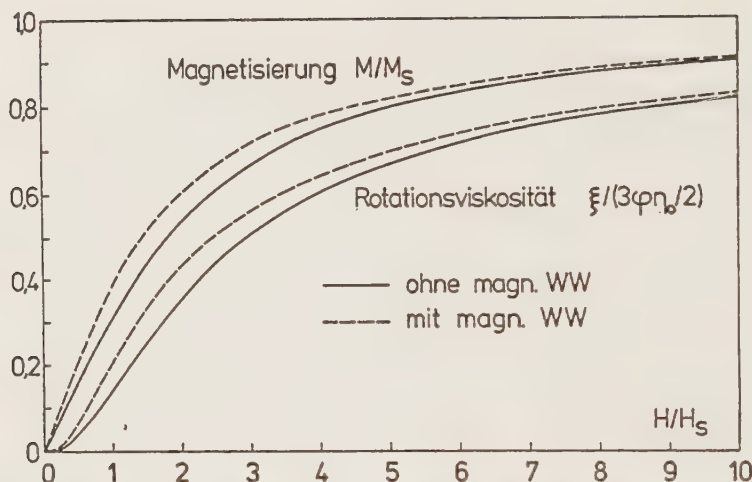


Diagramm 3.3 Magnetisierung und Rotationsviskosität eines Ferrofluids als Funktion der Feldstärke mit $H_s = k_B T / (\mu_0 V M_{Fe_3O_4})$. Die unterbrochenen Kurven enthalten die Korrektur durch magnetische Wechselwirkung.

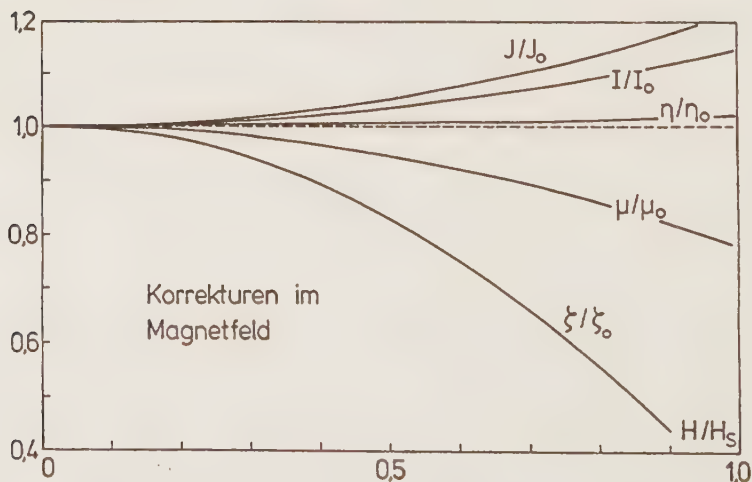


Diagramm 3.4 Vergleich der nichtlinearen Korrekturen von Permeabilität μ , Viskosität η und der Ableitung $\zeta = dK/dH$ der pyromagnetischen Konstanten. Die Größen sind auf ihren Wert im Feld $H=0$ normiert. Abgesehen von der pyromagnetischen Konstanten bleiben die Abweichungen zum Bezugswert im verwendeten Feldstärkebereich $H < 0,7 H_s$ unter 10 %.

4. Kräftevergleich

Die Lösungen der nichtlinearen Bewegungsgleichungen der Kontinuumsmechanik sind weder eindeutig noch in geschlossener Form darstellbar. Deshalb hat sich gerade in der Hydrodynamik die Ähnlichkeitstheorie als wichtiges Hilfsmittel herausgebildet. Die Ähnlichkeitstheorie basiert auf der Reduktion der Parameterzahl eines Problems auf seine relevanten dimensionslosen Verhältnisse unter Ausnutzung der Homogenität physikalischer Gesetze bei Skalentransformationen. Damit wird es möglich, sowohl bekannte Ergebnisse auf ähnliche Systeme, d.h. solche mit gleichen Verhältnissen, zu übertragen als auch Skalenrelationen zwischen den Parametern eines Systems zu ermitteln, ohne die zugehörigen Bewegungsgleichungen explizit lösen zu müssen. Man spricht von geometrischer Ähnlichkeit, wenn korrespondierende Längenverhältnisse wie das Aspektverhältnis gleich sind, und von kinematischer bzw. dynamischer Ähnlichkeit, wenn Geschwindigkeits- bzw. Kräfteverhältnisse übereinstimmen.

Der Gegenstand dieses Kapitels ist das Verhältnis zwischen der archimedischen und der magnetischen Auftriebskraft in Ferrofluiden und seine Beziehung zu anderen Parametern. Beide Kräfte unterscheiden sich grundlegend, denn im Gegensatz zur Massendichte handelt es sich bei der Magnetisierung M um eine Dipoldichte. Aus dem qualitativen Unterschied lassen sich quantitative Schlußfolgerungen ziehen, die die Möglichkeiten und Grenzen thermischer Konvektion in Ferrofluiden abstecken und deshalb richtungsweisend für die Konzeption der Experimente sind.

4.1 Innere und äußere Kräfte

Die Kräfte, die eine Flüssigkeitsströmung verursachen, werden durch Wechselwirkung mit einer äußeren Ladungsverteilung oder durch Wechselwirkung zwischen den Flüssigkeitselementen hervorgerufen. Im allgemeinen ist die Masse der äußeren Ladungsverteilung so groß, daß die Rückkopplung durch die Impulsänderung mit der Strömung vernachlässigt werden kann. Die äußere Wechselwirkung wird also von einem konstanten Kraftfeld beschrieben, dessen Zustand nicht von der Bewegung in der Flüssigkeit abhängt.

Im Gegensatz dazu wird das Wechselwirkungsfeld zwischen Flüssigkeitselementen von der Strömung und der Ladungsverteilung beeinflusst. In einem homogenen ruhenden Medium heben sich die Wechselwirkungskräfte eines Flüssigkeitselementes mit seiner Umgebung auf. Erst mit Inhomogenitäten in der Ladungsdichte werden Kraftwirkungen möglich. Die innere Kraft auf ein Flüssigkeitselement ist proportional zu seinem Volumen (seiner Ladung) und zum Gradienten der Ladungsdichte. Mit zunehmendem Gradienten der Ladungsdichte, z.B. bei abnehmender Schichtdicke und konstanter Differenz der Ladungsdichten zwischen Ober- und Unterseite, wächst der relative Einfluß der inneren Kräfte an, denn die äußere Kraftdichte hängt nicht von der Schichtdicke ab.

Der Übergangsbereich von dominierenden äußeren Kräften auf dominierende innere Kräfte wird wesentlich von der Reichweite der Wechselwirkung bestimmt. Die große Reichweite beispielsweise der Gravitationskraft akkumuliert die Wirkung von Masseverteilungen astronomischer Abmessungen wie der Erde. Demgegenüber sind lokale Dichteunterschiede von Masseverteilungen im Labormaßstab und erst recht Dichteunterschiede in der Flüssigkeit vernachlässigbar klein. Als Konsequenz der schwachen Ortsabhängigkeit langreichweitiger Kräfte ist die Kraftdichte in einem kleinen Volumenelement nahezu konstant und die Gesamtkraft ist proportional zum Volumen. Man nennt sie deshalb Volumenkräfte. Der destabilisierende Mechanismus der Schwerkraft (Rayleigh-Bénard-Konvektion) wurde in Kap. 2 diskutiert.

Ein Beispiel für den entgegengesetzten Extremfall bilden zwischenmolekulare Bindungskräfte, die mit zunehmendem Abstand sehr schnell abfallen. Ihr Wirkungsbereich ist auf Entfernungen in der Größenordnung der Molekülabstände in der Flüssigkeit beschränkt, und äußere Ladungsverteilungen sind vernachlässigbar, wenn sie sich nicht in direktem Kontakt mit der Flüssigkeit befinden. Die Kraft, die ein Flüssigkeitselement aufgrund von kurzreichweitiger Wechselwirkung erfährt, kann nur auf eine dünne Oberflächenschicht mit der Dicke der Eindringtiefe der Kraft wirken. Für die Gesamtkraft ist deshalb weniger das Volumen des Flüssigkeitselementes, sondern seine Oberfläche maßgeblich.

Zur Beschreibung der Kraft pro Fläche dient der Spannungstensor. Er enthält den Druck, die Viskosität und Grenzflächenspannungen. Die

Viskosität wirkt generell stabilisierend auf eine Flüssigkeitsschicht, und der Beitrag des Druckes ist in einer inkompressiblen Flüssigkeit indifferent, aber Grenzflächenspannungen können eine ruhende Flüssigkeitsschicht destabilisieren. Man betrachte eine von unten beheizte und oben gekühlte Schicht (siehe Bild 4.1). Die Oberseite befindet sich in Kontakt mit Luft, deren Viskosität sehr viel kleiner als die der Flüssigkeit sei. Bei konstanter Oberflächentemperatur ist die Grenzflächenspannung Fluid-Luft konstant und der ruhende Zustand befindet sich im mechanischen Gleichgewicht. Mit einer Störung z.B. in Form eines aufwärtsbewegten warmen Flüssigkeitselementes nimmt die Oberflächenspannung lokal ab. Der entstehende Gradient der Oberflächenspannung, der zu kälteren Regionen hin gerichtet ist, transportiert die erwärmte Flüssigkeit parallel zur Oberfläche ab. Von unten nachströmende warme Flüssigkeit reduziert die Oberflächenspannung weiter und verstärkt damit die Störung. Die von Oberflächenspannungen hervorgerufene Konvektion wird als Marangoni-Konvektion bezeichnet.

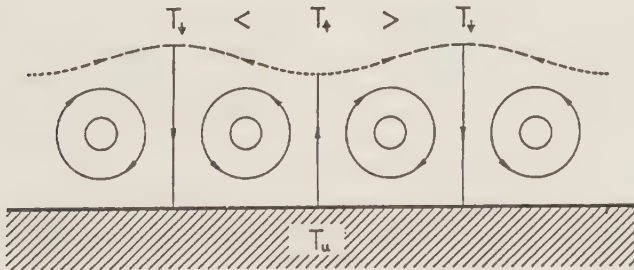


Bild 4.1 Thermische Konvektion durch zwischenmolekulare Kräfte. Die Variation der Oberflächenspannung wird durch die Strichlänge angedeutet.

In Gegenwart von Schwerkraft und Oberflächenspannungen hängt der relative Beitrag der beiden Kräfte von der Schichtdicke ab. Da die Volumenkraft mit der dritten Potenz der Schichtdicke abnimmt und die Flächenkraft nur mit der zweiten Potenz, dominiert der Einfluß der Oberflä-

chenspannungen bei kleinen Schichtdicken. Für viele Flüssigkeiten liegt der Übergangsbereich bei Schichtdicken in der Größenordnung einiger Millimeter.

Kräfte auf Dipole und zwischen Dipolen nehmen eine Mittelstellung ein, denn die Dipolwechselwirkung klingt mit zunehmendem Abstand r schneller ab ($\sim 1/r^3$) als die Gravitationswechselwirkung ($\sim 1/r$), aber ihre Reichweite übertrifft die der Bindungskräfte ($\sim 1/r^6$). Man sollte deshalb erwarten, daß bei Magnetokonvektion sowohl äußere als auch innere Kräfte beteiligt sind. Diese Erwartung wird auch tatsächlich bestätigt, wenn ausschließlich magnetische Kräfte wirksam sind.

In Konkurrenz mit anderen Kräften unterliegt das Verhältnis äußerer und innerer magnetischer Kräfte jedoch Einschränkungen. Um z.B. zu erreichen, daß der magnetische Auftrieb in einem äußeren vertikalen Feldgradienten $G^{(ex)}$ mit dem archimedischen Auftrieb im Schwerfeld vergleichbar ist, muß die magnetische Rayleigh-Zahl R_m ungefähr so groß sein wie die archimedische Rayleigh-Zahl Ra (vgl. Kap. 2.1):

$$\gamma \rho g \approx \mu_0 K G^{(ex)} \quad (4.1)$$

Mit den Werten des Standardferrofluids aus Tabelle 3.1 und dem maximalen Wert der pyromagnetischen Konstante $K_{max} = 50 \text{ A}/(\text{K} \cdot \text{m})$, der bei einer Feldstärke $H^{(ex)} = H_s$ angenommen wird, erhält man für den minimalen Feldgradienten:

$$G^{(ex)} > 2 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2 \quad (4.2)$$

Zwar sind Gradienten dieser Größenordnung nicht ungewöhnlich, aber der vertikale Feldgradient ist nicht homogen in horizontaler Richtung. Als Folge der Nebenbedingungen

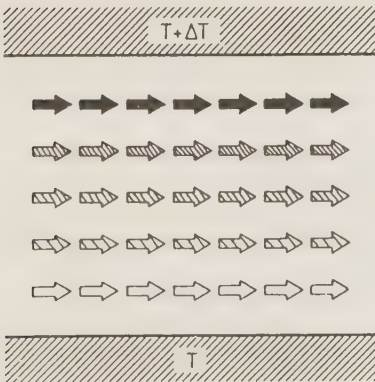
$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (4.3)$$

denen das äußere Feld unterworfen ist, sind die Flächen konstanter Feldstärke H , d.h. die Äquipotentialflächen für die Kraft auf die Dipole, gekrümmt. Der Mittelwert der beiden Hauptkrümmungsradien beträgt unabhängig von der Richtung des Feldes

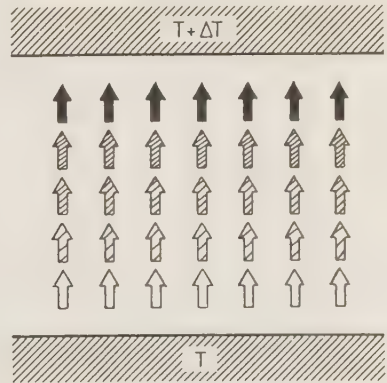
$$R = 2 \cdot H^{(ex)} / G^{(ex)} < 0,15 \text{ m}, \quad (4.4)$$

und ist damit um sieben Größenordnungen kleiner als der Krümmungsradius der Äquipotentialflächen des Gravitationspotentials. Aufgrund ihrer unterschiedlichen Krümmung sind die Äquipotentialflächen des magnetischen Feldes und des Schwerfeldes nicht parallel. Die Homogenitätsforderung verschwindender Temperaturgradienten in den Äquipotentialflächen (vgl. Kap. 2.1) kann deshalb nicht gleichzeitig für die Schwerkraft und die äußere magnetische Kraft realisiert werden.

Die innere magnetische Kraftwirkung resultiert aus der Wechselwirkung zwischen den Dipolen. Als Folge der Anisotropie der Dipolwechselwirkung hängt ihr Beitrag zur thermischen Konvektion von der relativen Orientierung der Dipole zum Gradienten der Dipoldichte ab, der Voraussetzung für innere Kraftwirkungen ist. Der Gradient der Magnetisierung ist antiparallel zum Temperaturgradienten in der Flüssigkeit, und die mittlere Orientierung der Momente wird vom äußeren (homogenen) Magnetfeld vorgegeben. Ohne äußeres Magnetfeld hebt sich die je nach relativer Orientierung abstoßende oder anziehende Kraftwirkung zwischen den thermisch fluktuierenden Dipolen im zeitlichen Mittel auf.



4.2a



4.2b

Bild 4.2 Schematische Darstellung der Dipoldichte in einer Ferrofluidschicht, die von unten beheizt und von oben gekühlt wird ($\Delta T < 0$), im horizontalen Feld (a) bzw. im vertikalen Feld (b). Die mittlere Orientierung der Dipole wird durch die Pfeilrichtung angedeutet und ihre Intensität durch die Schattierung.

Die Verteilung der Dipoldichte in einer Flüssigkeitsschicht, die von unten beheizt und von oben gekühlt wird, ist in Diagramm 4.2 für horizontales und vertikales äußeres Feld schematisch dargestellt. Unabhängig von der Feldrichtung nimmt die Magnetisierung in beiden Fällen von unten nach oben zu. Im homogenen Temperaturgradienten befindet sich die Flüssigkeitsschicht im mechanischen Gleichgewicht bezüglich der Wechselwirkungskräfte, aber eine Störung z.B. in Form eines nach unten bewegten kalten Flüssigkeitselementes erfährt eine Kraft. Je nachdem, ob die Kraft in oder gegen die Bewegungsrichtung wirkt, wird die Störung verstärkt oder geschwächt.

a) Horizontales Feld:

Die Dipole in einer horizontalen Ebene parallel zum äußeren Feld ziehen sich gegenseitig an. Da die Kraft proportional zur Dipoldichte in einer Schicht ist, muß Energie aufgewendet werden, um ein Flüssigkeitselement in wärmere, schwächer magnetisierte Regionen zu transportieren. Die Kraft ist der Störung entgegengerichtet und wirkt deshalb stabilisierend.

b) Vertikales Feld

Die Dipole in einer horizontalen Ebene senkrecht zum äußeren Feld stoßen sich gegenseitig ab. Damit wird Energie frei, wenn ein kaltes Flüssigkeitselement in ein Gebiet mit geringerer Dipoldichte verschoben wird. Das gleiche gilt für ein aufwärts bewegtes warmes Flüssigkeitselement; seine Bewegung wird von der Dipolwechselwirkung unterstützt, weil es die Energiedichte in den kälteren Schichten reduziert. Der Mechanismus entspricht vollständig dem der Marangoni-Konvektion, denn auch dabei wird die Strömung dadurch angetrieben, daß die Oberflächenenergie der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und Luft von aufsteigender erwärmter Flüssigkeit bzw. von absinkender kühler Flüssigkeit reduziert wird.

Magnetische Konvektion in einem äußeren Feldgradienten entspricht der Rayleigh-Bénard-Konvektion, in einem inneren Gradienten der Marangoni-Konvektion. Aufgrund der unterschiedlichen geometrischen Verhältnisse der Äquipotentialflächen der äußeren magnetischen Kraft und der Schwerkraft kann die Konkurrenz beider Kräfte nicht unter homogenen Bedingungen untersucht werden. Nur im schwerelosen Zustand kann magnetische

Rayleigh-Bénard-Konvektion mit einem Ferrofluid z.B. zwischen zwei koaxialen Zylindern, von denen der innere beheizt und der äußere gekühlt wird, verwirklicht werden. Wenn der Feldgradient von einem in der Achse fließenden elektrischen Strom erzeugt wird, ist die geforderte Homogenität transversal zur radialen magnetischen Kraft erfüllt.

In Gegenwart der äußeren Schwerkraft kann die Konkurrenz und Kooperation nur mit den inneren magnetischen Kräften untersucht werden. Gerade weil sich die beiden Kräfte qualitativ unterscheiden, ist zu vermuten, daß die Form der Konvektion vom relativen Einfluß beider abhängt, der mit dem äußeren Magnetfeld kontrolliert werden kann.

4.2 Folgerungen

Aufgrund der verhältnismäßig großen Reichweite der Dipolwechselwirkung ist es zweckmäßig, das innere Kraftfeld mit dem lokalen Magnetfeld zu beschreiben, das sich als Lösung der Maxwell-Gleichungen im Ferrofluid ergibt. Die Maxwell-Gleichungen reduzieren sich unter der Voraussetzung horizontaler Homogenität auf die Forderung, daß die Summe der Vertikalkomponenten der Magnetisierung und des lokalen Feldes konstant und gleich der Vertikalkomponente des äußeren Feldes ist:

$$H_z + M_z = H_z^{(ex)} \quad (4.5)$$

Mit der vereinfachten Zustandsgleichung für die Magnetisierung

$$M(T, H) = M^{(a)} - K \cdot (T - T^{(a)}) + \chi \cdot (H - H^{(a)}), \quad (4.6)$$

die die lineare Abhängigkeit von der Temperatur und vom Magnetfeld in der Umgebung ihrer mit dem Index (a) gekennzeichneten Mittelwerte beschreibt, folgt für einen vertikalen Temperaturgradienten $\beta = \Delta T/d$:

$$M_z(z) = M_z^{(a)} - \frac{K\beta}{(1+\chi)} z \quad \text{und} \quad H_z(z) = H_z^{(a)} + \frac{K\beta}{(1+\chi)} z. \quad (4.7a)$$

Die entsprechenden Lösungen für die Horizontalkomponenten lauten:

$$M_{x,y}(z) = M_{x,y}^{(a)} - K\beta z \quad \text{und} \quad H_{x,y}(z) = H_{x,y}^{(ex)}, \quad (4.7b)$$

denn die in horizontaler Richtung homogene Magnetisierung besitzt keine Rückwirkung auf das Feld. Bei verschwindender Vertikalkomponente des äußeren Feldes gibt es zwar einen Gradienten in der Magnetisierung, aber keinen inneren Feldgradienten, der Voraussetzung für eine Kraftwirkung ist. Deshalb üben die inneren Kräfte bei horizontalem äußerem Feld, wie schon im vorhergehenden Abschnitt bemerkt wurde, keine destabilisierende Wirkung aus.

Der innere Feldgradient bei vertikalem äußerem Feld

$$G^{(in)} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{K\beta}{1+\chi} \quad (4.8)$$

Ist dagegen stets destabilisierend, weil er parallel zum Temperaturgradienten gerichtet ist. Formal kommt dies darin zum Ausdruck, daß die magnetische Rayleigh-Zahl R_m mit dem inneren Gradienten $G^{(in)}$ als treibender Kraft proportional zum Quadrat der Temperaturdifferenz, also unabhängig vom Vorzeichen des Temperaturgradienten stets positiv ist:

$$R_m = \frac{\mu_0 K^2 \Delta T^2 d^2}{\chi \eta (1+\chi)} \quad (4.9)$$

Die Symmetrie bezüglich des Vorzeichens der Temperaturdifferenz wird bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion bzw. bei der Marangoni-Konvektion von der Vorzugsrichtung der Erdbeschleunigung bzw. den unterschiedlichen Randbedingungen an der festen und freien Oberfläche gebrochen. Der archimedische Auftrieb oder Oberflächenspannungen sind deshalb nur dann destabilisierend, wenn die Flüssigkeitsschicht von unten beheizt wird, d.h. in unserer Nomenklatur, wenn die Temperaturdifferenz negativ ist.

In Gegenwart sowohl archimedischer als auch magnetischer Kräfte muß bei der Stabilitätsanalyse deren Summe betrachtet werden. Nimmt man an, daß die Form der von magnetischen Kräften verursachten Konvektion der archimedischen Konvektion gleicht (geometrische Ähnlichkeit), dann genügt es, die globalen Werte der Auftriebskräfte, d.h. die Rayleigh-Zahlen zu addieren. Als Bedingung für das Einsetzen der Konvektion muß also die Summe der Rayleigh-Zahlen R_a und R_m einen kritischen Wert überschreiten, der z.B. bei festen Randbedingungen 1708 beträgt:

$$R_a + R_m > 1708.$$

Da wir die archimedische Rayleigh-Zahl als abhängige Variable wählen, erhalten wir für deren kritischen Wert als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl

$$Ra_c = 1708 - R_m. \quad (4.10)$$

Mit zunehmendem magnetischem Auftrieb verkleinert sich die kritische archimedische Rayleigh-Zahl und für $R_m > 1708$ wird Ra_c sogar negativ. Der magnetische Auftrieb überkompensiert dann den stabilisierenden archimedischen Beitrag einer von oben beheizten Schicht. Ob diese Situation im Experiment realisiert werden kann, bestimmt der relative Einfluß des magnetischen Auftriebs.

Der Vergleich zwischen magnetischen und archimedischen Auftriebskräften mit innerem Feldgradienten wird dadurch erschwert, daß das Verhältnis von Ra und R_m nicht nur, wie im äußeren Gradienten, von den Materialeigenschaften, sondern auch von der Schichtdicke und der Temperaturdifferenz abhängt. Anstelle eines festen Quotienten erhalten wir deshalb eine Relation zwischen kritischer Temperaturdifferenz und Schichtdicke. Zu diesem Zweck fassen wir die Materialkonstanten und die numerischen Parameter der archimedischen und magnetischen Rayleigh-Zahl in den Konstanten

$$c_a = \frac{\gamma \rho g}{\alpha \eta 1708} \quad \text{und} \quad c_m = \frac{\mu_0 K^2}{\alpha \eta (1 + \chi) 1708} \quad (4.11)$$

zusammen und gehen zu neuen Einheiten

$$\Delta T^* = c_a^{1/2} \cdot c_m^{-3/4} \quad \text{und} \quad d^* = c_a^{-1/2} \cdot c_m^{1/4} \quad (4.12)$$

für die Temperaturdifferenz bzw. die Schichtdicke über. Damit folgt aus Gleichung (4.10) die Skalenrelation

$$\frac{\Delta T_c}{\Delta T^*} = \frac{d}{2d^*} \pm \sqrt{\left(\frac{d^*}{d}\right)^2 + \left(\frac{d}{2d^*}\right)^2}. \quad (4.13)$$

Die Schichtdicke, gemessen in Einheiten von d^* , bestimmt im wesentlichen, welcher der beiden Auftriebskräfte vorherrscht. Folgende Grenzfälle

sind zu unterscheiden:

- a) $d \ll d^*$: Der magnetische Auftrieb dominiert. Die kritische Temperaturdifferenz ist umgekehrt proportional zur Schichtdicke und kann positiv oder negativ sein.
- b) $d \gg d^*$ und $\Delta T_c < 0$: Der archimedische Auftrieb dominiert und die kritische Temperaturdifferenz ist umgekehrt proportional zur dritten Potenz der Schichtdicke (Rayleigh-Bénard-Konvektion).
- c) $d \gg d^*$ und $\Delta T_c > 0$: Magnetischer und archimedischer Auftrieb sind entgegengesetzt gleich. Der archimedische Auftrieb wirkt stabilisierend ($Ra < 0$), der magnetische destabilisierend ($Rm > 0$). Die kritische Temperaturdifferenz ist proportional zur Schichtdicke.

In Diagramm 4.3 ist die Skalenrelation (4.13) zusammen mit den Asymptoten (a), (b) und (c) dargestellt.

Damit nun die Inneren magnetischen Kräfte mit der äußeren Schwerkraft konkurrieren können, muß der Übergangsbereich bei einer Temperaturdifferenz ΔT^* liegen, die kleiner als das Temperaturintervall ist, in dem das Ferrofluid flüssig und stabil ist. Diese Bedingung bildete neben den Stabilitätsanforderungen von Kapitel 3.2 das Auswahlkriterium für unser Standardferrofluid. Mit den Materialgrößen von Tabelle 3.1 und dem Maximalwert der pyromagnetischen Konstanten $K_{\max} = 50 \text{ A}/(\text{m} \cdot \text{K})$ erhalten wir für die Temperaturdifferenz und die Schichtdicke am Übergangsbereich:

$$\Delta T^* = 12 \text{ K} \quad \text{und} \quad d^* = 1,75 \text{ mm}. \quad (4.14)$$

Der Bereich der flüssigen Phase des Ferrofluids erstreckt sich von etwa 7°C bis 70°C und gestattet somit die Temperaturdifferenz auf mehr als den fünffachen Wert von ΔT^* zu vergrößern und das gesamte in Diagramm 4.3 dargestellte Intervall zu überstreichen.

Die Abschätzung der Kräfteverhältnisse wurde unter der Annahme geometrischer Ähnlichkeit des Strömungsprofils und der Verteilung der archimedischen und magnetischen Kräfte durchgeführt. Da jedoch das innere Kraftfeld Folge des Temperaturgradienten ist, wird es, im Gegen-

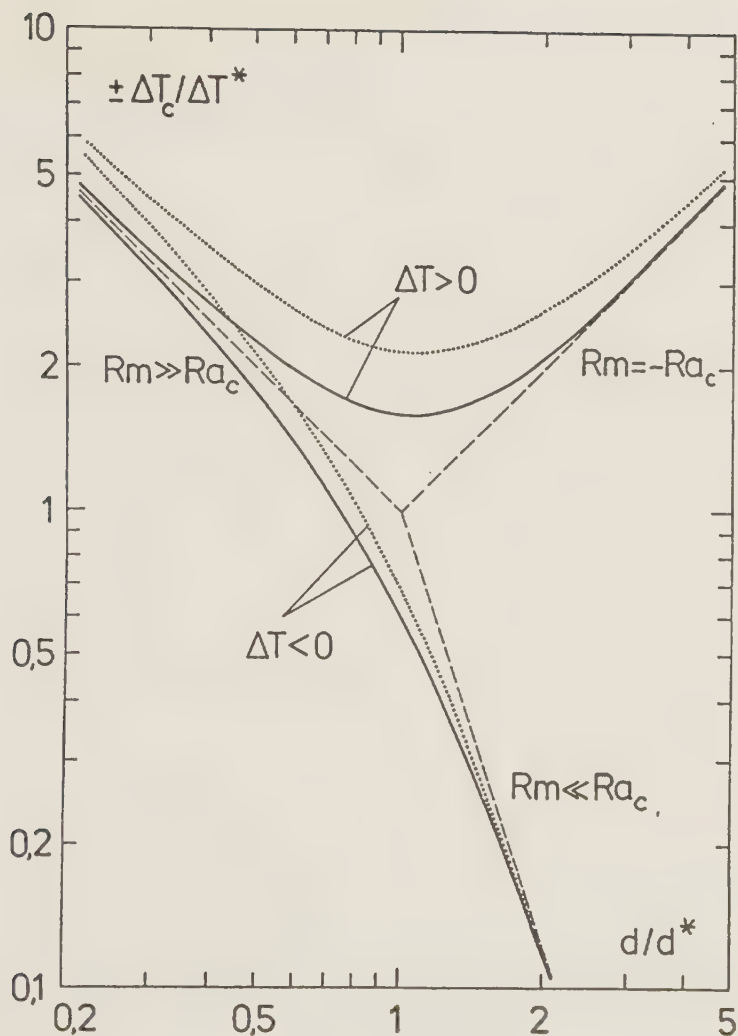


Diagramm 4.3 Kritische Temperaturdifferenz als Funktion der Schichtdicke eines Ferrofluids. Die durchgezogenen Linien wurden mit der Annahme (4.10) berechnet, während die gepunkteten Kurven den exakten Verlauf wiedergeben (vgl. Kapitel 5.4).

satz zur Schwerkraft, von der durch Konvektion veränderten Temperaturverteilung beeinflusst. Die quantitativen Auswirkungen der Kopplung zwischen Temperatur- und Magnetfeld werden im nächsten Kapitel untersucht werden. Sie erzwingen eine Vergrößerung der kritischen Temperaturdifferenz auf die gepunktete Linie in Diagramm 4.3, aber sie ändern nichts am asymptotischen Verhalten. Die kritischen Werte der Rayleigh-Zahlen erweisen sich als verhältnismäßig robust gegen Änderungen des Strömungsprofils, weshalb die grobe Abschätzung brauchbare Ergebnisse liefert. Der Umkehrschluß, daß sich das Konvektionsprofil nur wenig mit der magnetischen Rayleigh-Zahl ändert, darf dagegen nicht gezogen werden. Vielmehr ist damit zu rechnen, daß charakteristische Eigenschaften des Strömungsprofils wie die kritische Wellenzahl oder der Wärmetransport stark von der Differenz zwischen den Rayleigh-Zahlen Ra und Rm abhängen. Der Einfluß wird sich besonders für positive Temperaturgradienten bemerkbar machen, weil dann die Differenz $Rm - Ra$ mit wachsender Schichtdicke divergiert.

5. Berechnungen

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, daß magnetische Konvektion im wesentlichen von dem Gradienten des Dipolfeldes der Magnetitteilchen angetrieben wird. Da der Gradient des Feldes vom äußeren Temperaturgradienten verursacht wird, ist zu erwarten, daß auch die von der Konvektion erzeugte Temperaturverteilung erheblichen Einfluß auf die Feldverteilung und damit auf das Kräfteverhältnis von magnetischem und archimedischem Auftrieb besitzt. Deshalb können die Bewegungsgleichungen nicht, wie in Kapitel 4 angenommen, unabhängig von den Feldgleichungen gelöst werden. Finlayson (1970) hat als erster das gekoppelte Gleichungssystem für Ferrofluide analysiert. Allerdings hat er nur den Fall einer von unten beheizten Flüssigkeitsschicht im homogenen vertikalen Magnetfeld berücksichtigt (d.h. sowohl Ra als auch Rm als positiv angenommen) und sich auf die Berechnung der Lösbarkeitsbedingung des linearisierten Gleichungssystems beschränkt, die den kritischen Wert der Rayleigh-Zahl und der Wellenzahl liefert, aber keine Information über Amplitude und Form der Konvektion enthält. Um die für linearisierte und Isotrope Probleme charakteristische Entartung der Lösungsmannigfaltigkeit einzuschränken, wird in der folgenden Berechnung der Einfluß horizontaler Feldkomponenten und nichtlinearer Beiträge der Konvektionsamplitude einbezogen, und um die Auswirkungen der Konkurrenz von Schwerkraft und magnetischer Kraft zu verdeutlichen, werden auch negative Werte der Rayleigh-Zahlen zugelassen. Die archimedische Rayleigh-Zahl wird z.B. dann negativ, wenn die Flüssigkeitsschicht von oben beheizt wird.

Da die folgende Analyse nicht in der Absicht entstand, die Experimente numerisch zu simulieren, sondern mit dem Ziel, die qualitativen Eigenschaften in anschaulich nachvollziehbare Schritte zu zerlegen und die charakteristischen Größenverhältnisse herauszuarbeiten, wurden die Gleichungen teilweise unter idealisierenden Annahmen gelöst. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die nichtlinearen Gleichungen aufgestellt. Ihre linearisierte Version wird im zweiten und dritten Abschnitt unter Berücksichtigung einer horizontalen Feldkomponente und anisotroper Flüssigkeitseigenschaften diskutiert. Der Einfluß der magnetischen Randbedingungen auf den kritischen Wert der Rayleigh-Zahl, auf den Anstieg der Amplitude und auf die Modenselektion ist Gegenstand des vierten und fünften Abschnitts.

5.1 Die Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen einer chemisch homogenen Flüssigkeit ergeben sich in ihrer allgemeinsten Form aus den Erhaltungssätzen von Masse, Energie, Impuls und Drehimpuls:

$$\partial_t \rho + \partial_j v_j \rho = 0, \quad (5.1a)$$

$$\partial_t \rho U + \partial_j v_j \rho U = S_{ij} \partial_j v_i - \partial_j j_j, \quad (5.1b)$$

$$\partial_t \rho v_i + \partial_j v_j \rho v_i = \rho g_i + \partial_j S_{ij}. \quad (5.1c)$$

Der Drehimpuls bleibt erhalten, wenn der Spannungstensor S_{ij} symmetrisch ist:

$$S_{ij} = S_{ji}. \quad (5.1d)$$

Da Ferrofluide an das magnetische Feld ankoppeln, müssen die Erhaltungssätze um die Maxwell-Gleichungen ergänzt werden, die für elektrisch isolierende und ungeladene Medien die Form

$$\partial_j B_j = 0 \quad \text{und} \quad (5.1e)$$

$$\partial_j H_i = \partial_i H_j \quad (5.1f)$$

annehmen. Es bezeichnet ρ die Dichte, v_j die Geschwindigkeit, U die innere Energiedichte, j_j den Wärmestrom, g_i die äußere Kraftdichte, die in unserem Fall durch die Erdbeschleunigung gegeben ist, B_j die magnetische Flußdichte und H_i die magnetische Feldstärke. Die Feldstärke H und die magnetische Flußdichte B sind durch die Relation

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (5.2)$$

miteinander verknüpft, wobei $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ die Induktionskonstante und M die Magnetisierung bezeichnet.

Der Spannungstensor magnetischer Flüssigkeiten mit newtonischem Verhalten (linearer Beziehung zwischen Spannungstensor und dem Geschwindigkeitsgradienten $\partial_j v_i$) besitzt die allgemeine Form

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \frac{1}{2}(H_i B_j + H_j B_i). \quad (5.3)$$

Sein isotroper Teil p unterscheidet sich vom thermodynamischen Druck p_e um einen zur Divergenz der Geschwindigkeit proportionalen Term

$$p = p_e - \zeta \partial_k v_k. \quad (5.4)$$

Der Proportionalitätsfaktor ζ ist die Volumenviskosität. Da Ferrofluide wie die meisten Flüssigkeiten sehr kleine Kompressibilität besitzen, vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (5.1a) auf

$$\partial_k v_k = 0, \quad (5.5)$$

weshalb die Differenz zwischen p und p_e vernachlässigt werden kann. Unter der Voraussetzung von (5.5) beträgt der magnetische Beitrag p_m zum thermodynamischen Druck (Chu 1959)

$$p_m = \int_0^H B dH. \quad (5.6)$$

Vom Geschwindigkeitsgradienten $\partial_i v_j$ und vom Maxwell'schen Spannungstensor $H_i B_j$ tragen nur die symmetrischen Anteile bei, da sich die antisymmetrischen als Folge der Drehimpulserhaltung (5.1d) aufheben:

$$\frac{1}{2}(H_i B_j - H_j B_i) = \xi(\partial_i v_j - \partial_j v_i). \quad (5.7)$$

Für den Proportionalitätsfaktor, die Rotationsviskosität ξ , fand Shliomis (1972), indem er die magnetische Relaxationsgleichung löste, den Ausdruck

$$\xi/\eta = \frac{3}{2} \varphi \frac{\alpha - \tanh \alpha}{\alpha + \tanh \alpha} \sin^2 \gamma.$$

Da ξ für das verwendete Ferrofluid bei kleiner Feldstärke H sehr viel klein-

ner als die dynamische Viskosität η ist (vgl. Kapitel 3) können wir den antisymmetrischen Teil von $H_i B_j$ vernachlässigen, d.h.

$$H_i B_j = H_j B_i$$

setzen, oder, was damit wegen (5.2) gleichbedeutend ist, M parallel zu H annehmen

$$M = M(H, T) \cdot H/H, \quad (5.8)$$

wobei M und H den Betrag von M bzw. H bezeichnet.

Die innere Energie U ist allgemein vom Druck p , der Temperatur T und der magnetischen Feldstärke H abhängig. Da wir Inkompressibilität voraussetzen, ist der Druck jedoch nicht bestimmend. Weil auch der Beitrag der Magnetisierung zur Energie verschwindend klein ist (vgl. Kap. 3), kann die Energie in der Form

$$U = C \cdot T$$

mit der spezifischen Wärme C beschrieben werden. Konsistent mit dieser Näherung ist die Vernachlässigung des Terms $S_{ij} \partial_j v_i$ in der Energiegleichung, denn die freigesetzte potentielle Energie und ihre Umsetzung in Wärme durch viskose Reibung ist klein gegenüber der durch Konvektion transportierten Energie. Da schließlich der Wärmestrom j proportional zum negativen Gradienten der Temperatur mit der Wärmeleitfähigkeit k als Proportionalitätskonstante ist, können wir die Energiegleichung zu einer Temperaturgleichung umformulieren, die sich nicht von derjenigen für unmagnetische Flüssigkeiten unterscheidet:

$$\partial_t \rho C T + \partial_j v_j \rho C T = k \partial_j \partial_j T. \quad (5.9)$$

Die Gleichungen müssen durch Zustandsgleichungen für die Dichte $\rho(T)$ und die Magnetisierung $M(H, T)$ ergänzt werden. Für die Dichte wird in der Umgebung ihres Mittelwertes $\rho^{(a)}$ bei der mittleren Temperatur $T^{(a)}$

$$\rho(T) = \rho^{(a)} (1 - \gamma(T - T^{(a)})) \quad (5.10)$$

mit der Konstanten γ als Volumenausdehnungskoeffizient angenommen. Entsprechend wird die magnetische Zustandsgleichung um das mittlere Feld und die mittlere Temperatur linearisiert

$$M_i = M_i^{(a)} + (\chi^{(tot)})(\delta_{ij} - h_i h_j) + \chi h_i h_j \cdot (H_j - H_j^{(a)}) - K h_j (T - T^{(a)}), \quad (5.11)$$

wobei $\chi^{(tot)}$ die totale Suszeptibilität, χ die differentielle Suszeptibilität, $K = -\partial M / \partial T$ die pyromagnetische Konstante und h_i den Einheitsvektor in Feldrichtung bezeichnet. Wenn die Magnetisierung linear von H abhängt, also $\chi^{(tot)} = \chi$ gilt, vereinfacht sich der Suszeptibilitätstensor auf $\chi \delta_{ij}$. Obwohl für kleine Feldstärken in guter Näherung M proportional zu H ist, behalten wir zunächst (5.11) bei, weil anhand der anisotropen Suszeptibilität die Wirkung des magnetischen Störfeldes anschaulich gemacht werden kann.

Die Flüssigkeit werde in vertikaler Richtung von den Ebenen $z = -d/2$ und $z = d/2$ begrenzt, wobei die z -Achse antiparallel zur Erdbeschleunigung g_i gewählt wird. An den Begrenzungsflächen $z = \pm d/2$ erzwingen Stetigkeitsforderungen an Felder und transversale Stromdichten folgende Randbedingungen für Geschwindigkeit, Temperatur und Magnetfeld:

$$\text{Geschwindigkeit} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{v}^{(in)} = \mathbf{z} \times \mathbf{v}^{(ex)} \quad (5.12a)$$

$$\text{Flüssigkeitsstrom} \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}^{(in)} = 0, \quad (5.12b)$$

$$\text{Impulsstrom} \quad \eta^{(in)} \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbf{v}^{(in)}) = \eta^{(ex)} \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbf{v}^{(ex)}), \quad (5.12c)$$

$$\text{Temperatur} \quad T^{(in)} = T^{(ex)} \quad (5.12d)$$

$$\text{Wärmestrom} \quad k^{(in)} \partial_z T^{(in)} = k^{(ex)} \partial_z T^{(ex)} \quad (5.12e)$$

$$\text{Feldstärke} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{H}^{(in)} = \mathbf{z} \times \mathbf{H}^{(ex)} \quad (5.12f)$$

$$\text{magn. Flußdichte} \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{B}^{(in)} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{B}^{(ex)} \quad (5.12g)$$

Die Indices (in) und (ex) dienen der Unterscheidung der entsprechenden Größen innerhalb und außerhalb der Flüssigkeitsschicht. Mit $\mathbf{z}$ wird der Einheitsvektor in z -Richtung bezeichnet.

Die Bedingung (5.12c) enthält allgemein noch weitere Beiträge des Spannungstensors (z.B. die Oberflächenspannung), die sich in unserem Fall jedoch aufheben, da wir $k^{(in)}/k^{(ex)}=0$ fordern. Die vertikalen Randbedingungen und die Bewegungsgleichungen reichen nicht aus, um die konvektive Strömung eindeutig zu charakterisieren. Auf Kosten der Eindeutigkeit von Phase und Orientierung der horizontalen Moden nehmen wir den Grenzfall großer horizontaler Ausdehnung im Vergleich zur Schichtdicke an. Dies erlaubt uns die z -Abhängigkeit von den horizontalen Koordinaten zu separieren.

Die Bewegungsgleichungen werden in Gegenwart eines vertikalen Feldes mit dem Gradienten $G^{(ex)} = \partial_z H^{(ex)}$ und dem Temperaturgradienten $\beta = dT/dz$ erfüllt von

$$\mathbf{v}^{(0)} = 0, \quad (5.13a)$$

$$T^{(0)} = T^{(a)} + \beta z, \quad (5.13b)$$

$$\rho^{(0)} = \rho^{(a)} (1 - \gamma \beta z), \quad (5.13c)$$

$$H^{(0)} = H^{(a)} + h \frac{G + K\beta}{1 + \chi} z \quad \text{mit} \quad H^{(a)} = H^{(ex)} \frac{1 + \chi^{(ex)}}{1 + \chi^{(tot)}}, \quad (5.13d)$$

$$M^{(0)} = M^{(a)} + h \frac{\chi G - K\beta}{1 + \chi} z \quad \text{mit} \quad M^{(a)} = \chi^{(tot)} H^{(a)}. \quad (5.13e)$$

Mittelwerte sind mit dem Index (a) gekennzeichnet und der Index (0) steht für die statische Lösung. Um die lineare Beziehung (5.11) verwenden zu können, wurde

$$|K\beta d| \ll H^{(ex)} \quad \text{und} \quad |Gd| \ll H^{(ex)}$$

vorausgesetzt. Die zweite Ungleichung, die wegen (4.4) äquivalent zu $d \ll R$ ist, gestattet darüberhinaus die Krümmung der Äquipotentialflächen des Feldes zu vernachlässigen.

Die Dimension des Gleichungssystems läßt sich verkleinern, indem wir Potentiale für das Geschwindigkeitsfeld und das Magnetfeld einführen. Jedes solenoidale (quellenfreie) Vektorfeld $\mathbf{v}$ wie z.B. das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit besitzt die Darstellung

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{z}) \Psi + \nabla \times \mathbf{z} Z \quad (5.14)$$

mit der sogenannten poloidalen Komponente Ψ und der toroidalen Komponente Z (Warner 1972). Da die toroidale Komponente, die die vertikale Rotation der Flüssigkeit beschreibt, nicht unmittelbar vom thermischen Antrieb unterstützt wird und an den Rändern verschwindet, nimmt ihre Amplitude durch viskose Reibung stets ab. Bis zur dritten Ordnung der Störungsrechnung kann deshalb die Geschwindigkeit ausschließlich mit dem poloidalen Potential Ψ beschrieben werden (Schlüter et al., 1965).

Ebenso wie die Divergenzfreiheit die Zahl der unabhängigen Geschwindigkeitskomponenten einschränkt, werden, aufgrund der Rotationsfreiheit des Magnetfeldes, seine unabhängigen Komponenten auf ein skalares Potential Φ reduziert:

$$\mathbf{H} = \nabla \Phi. \quad (5.15)$$

Mit unserer Formulierung des Spannungstensors, der Geschwindigkeit und des Magnetfeldes werden die Bedingungen (5.1a), (5.1d) und (5.1e) definitionsgemäß erfüllt. Im nächsten Schritt fragen wir nach der Stabilität der statischen Lösung (5.13), verfolgen also die zeitliche Entwicklung einer Störung Θ der Temperatur T bzw. einer Störung $\nabla \Phi$ des Feldes oder einer Störung $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{z}) \Psi$ der Geschwindigkeit.

Nach Einsetzen von

$$T = T^{(0)} + \Theta,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)} + \nabla \Phi \quad \text{und}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{z}) \Psi$$

in die verbleibenden drei Gleichungen (5.1b) bzw. (5.9), (5.1c) und (5.1e),

Anwenden des Operators $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{z})$ auf (5.1c) und Übergang zu den Einheiten d für Längen, x/d für Geschwindigkeiten (x bezeichnet die Temperaturleitzahl), βd für Temperaturen und $K\beta d/(1+\chi)$ für Magnetfelder folgt:

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1}(\delta_i(\partial_t v_i + \partial_j v_i v_j)) = & \text{Ra} \Delta_2 \Theta + A \cdot \text{Rm} \Delta_2 \Theta + \text{Rm} \Delta_2 \Theta - \\ & \text{Rm} \Delta_2 \partial_z \Phi - \text{Rm} \delta_i (\Theta \partial_i \partial_z \Phi) - \Delta^2 \Delta_2 \Psi, \end{aligned} \quad (5.16a)$$

$$\partial_t \Theta + \Delta_2 \Psi + (\partial_i \Theta) \cdot (\delta_i \Psi) = \Delta \Theta, \quad (5.16b)$$

$$0 = \partial_z^2 \Phi + I \Delta_2 \Phi - \partial_z \Theta. \quad (5.16c)$$

Die Operatoren $(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ und $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{z})$ wurden mit Δ_2 bzw. δ abgekürzt. Dichteänderungen wurden nur in der Geschwindigkeitsgleichung berücksichtigt (Boussinesq-Approximation).

In den Gleichungen tauchen nur noch die dimensionslosen Verhältnisse,

die Prandtl-Zahl $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi},$

die archimedische Rayleigh-Zahl $\text{Ra} = \frac{\gamma g \beta d^4}{\chi \nu},$

die magnetische Rayleigh-Zahl $\text{Rm} = \frac{\mu_o (K\beta)^2 d^4}{\chi \eta (1+\chi)},$

das innere Permeabilitätsverhältnis $I = \frac{1+\chi^{(\text{tot})}}{1+\chi}$

und das Gradientenverhältnis $A = \frac{G}{K\beta} \quad \text{auf.}$

Die Prandtl-Zahl beschreibt das Verhältnis der Abklingzeiten von Geschwindigkeits- und Temperaturstörungen durch Diffusion. Da in Ferrofluiden $\text{Pr} \gg 1$ gilt, kann der Trägheitsterm in Gleichung (5.16a) vernachlässigt werden: In Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl gilt die archimedische Mechanik, d.h. Trägheitskräfte spielen keine Rolle. Aus dem gleichen Grund konnten auch die zeitabhängigen Terme der Feldgleichung vernachlässigt werden, denn die magnetische Diffusivität übertrifft die thermische wegen der kleinen elektrischen Leitfähigkeit von Ferrofluiden um mehrere Größenordnungen. Der beherrschende Einfluß auf den Übergang zur Konvektion

geht von den Temperaturstörungen Θ aus. Wenn Störungen der Temperatur aufgrund der Kopplung an das Geschwindigkeitsfeld schneller anwachsen als sie durch Wärmeleitung abklingen (vgl. Kap. 2), setzt Konvektion ein. Die typischen Geschwindigkeiten für das Anwachsen von Störungen durch den archimedischen und magnetischen Auftrieb finden ihren dimensionslosen Ausdruck in der archimedischen bzw. der magnetischen Rayleigh-Zahl. Im Gegensatz zum archimedischen Auftrieb $Ra \Delta_2 \Theta$ besitzt der magnetische Auftrieb Terme, die proportional zum magnetischen Potential Φ sind. Der relative Einfluß dieser Terme verschwindet jedoch mit zunehmendem äußeren Gradienten und im Grenzfall $|A| \gg 1$ besitzt das Gleichungssystem dieselbe Form wie für nichtmagnetische Flüssigkeiten. Das magnetische Potential, das sich vermöge Gleichung (5.16c) aus der Temperaturverteilung ergibt, bleibt dann ohne Auswirkung auf die Konvektion. Da das Ziel der Berechnungen gerade in der Analyse der Rückwirkung der Feldverteilung auf die Konvektion besteht, setzen wir $A=0$, wofür der Einfluß der Feldstörungen maximal ist. Die Allgemeinheit wird dadurch nicht eingeschränkt, denn der Fall $A \neq 0$ ergibt sich aus den Lösungen für verschwindenden äußeren Gradienten nach Substitution von Ra durch $(Ra+A \cdot R_m)$.

Das Verschwinden der Trägheitskräfte läßt vermuten, daß die einsetzende Konvektion stationär ist, denn die Kräfteverteilung wird nur vom momentanen Zustand und nicht von seiner zeitlichen Änderung bestimmt. Wenn die Kräfteverteilung eine reine Zustandsfunktion ist, dann existiert, ähnlich der freien Energie in der Gleichgewichtsthermodynamik, ein Potential, das von der realisierten Strömung minimallisiert wird. In der Tat konnte Finlayson (1970) die Existenz eines Potentials für positive Rayleigh-Zahlen beweisen. Da die sich aus dem Variationsprinzip ergebenden Euler-Lagrange-Gleichungen identisch sind mit der linearisierten und stationären Version von (5.16), kann unmittelbar gefolgert werden:

- a) Die Bifurkation ist superkritisch, d.h. für Rayleigh-Zahlen, die kleiner sind als der kritische Wert der linearen Theorie, ist Konvektion nicht möglich.
- b) Die einsetzende Konvektion ist stationär.

Aufgrund der zweiten Folgerung können wir uns von vorneherein auf stationäre Lösungen beschränken ($\partial_t \Theta = 0$). Daß die Bifurkation superkritisch ist, wird für positive magnetische Rayleigh-Zahlen quantitativ bestätigt werden.

Geordnet nach linearen und quadratischen Termen in Ψ , Θ und Φ und unter Berücksichtigung der erwähnten Einschränkungen erhalten wir schließlich für das zu lösende Gleichungssystem:

$$\Delta^2 \Delta_2 \Psi - Ra \Delta_2 \Theta - Rm (\Delta_2 \Theta - \Delta_2 \partial_z \Phi) = Rm \delta \cdot (\Theta \nabla \partial_z \Phi), \quad (5.17a)$$

$$\Delta \Theta - \Delta_2 \Psi = (\nabla \Theta) \cdot (\delta \Psi), \quad (5.17b)$$

$$\partial_z^2 \Phi + I \Delta_2 \Phi - \partial_z \Theta = 0. \quad (5.17c)$$

Wegen der vorausgesetzten Homogenität senkrecht zur z -Achse ist es naheliegend, die vertikale Abhängigkeit zu separieren und jede Variable in horizontaler Richtung in ihre Fourier-Komponenten zu zerlegen. Somit wird jede der Funktionen Ψ , Θ und Φ als Summe von Termen der Gestalt

$$f(a, z) \cdot \exp(a_x x + a_y y) \quad (5.18)$$

repräsentiert, wobei $\mathbf{a}$ den Wellenvektor der entsprechenden Fourier-Komponente bezeichnet. Da für das die Flüssigkeit begrenzende Medium Isotrope und

$$1/\chi^{(ex)} = K^{(ex)} = \gamma^{(ex)} = 0$$

angenommen wird, reduziert sich das Gleichungssystem (5.17) für $z > 1/2$ und $z < -1/2$ auf

$$\Delta \Psi = \Delta \Theta = \Delta \Phi = 0,$$

woraus mit dem Separationsansatz (5.18)

$$f(a, z) = \begin{cases} \exp(a/2 - az), & \text{für } z > 1/2 \\ \exp(a/2 + az), & \text{für } z < 1/2 \end{cases} \quad (5.19)$$

folgt. Die Lösung der Bewegungsgleichung außerhalb der Flüssigkeits-

schicht ermöglicht es, die Funktionen $v^{(ex)}$, $T^{(ex)}$ und $H^{(ex)}$ aus den Randbedingungen (5.12) zu eliminieren mit dem Ergebnis:

$$\Psi = 0, \quad \text{für } z = \pm 1/2 \quad (5.20a)$$

$$\eta^{(in)}/\eta^{(ex)} \partial_z^2 \Psi = \mp a \partial_z \Psi, \quad \text{für } z = \pm 1/2 \quad (5.20b)$$

$$k^{(in)}/k^{(ex)} \partial_z \Theta = \mp a \Theta, \quad \text{für } z = \pm 1/2 \quad (5.20c)$$

$$\mu^{(in)}/\mu^{(ex)} \partial_z \Phi = \mp a \Phi, \quad \text{für } z = \pm 1/2. \quad (5.20d)$$

Über die Randbedingungen für Ψ , Θ und Φ kommen drei weitere dimensionslose Parameter, die verallgemeinerten Biot-Zahlen, ins Spiel. Da wir speziell an den magnetischen Wirkungen interessiert sind, werden wir den allgemeinen Fall jedoch nur für das äußere Permeabilitätsverhältnis

$$J = \frac{\mu^{(ex)}}{\mu^{(in)}} = \frac{1 + \chi^{(ex)}}{1 + \chi}$$

zulassen. Als thermische Randbedingung wird generell

$$\Theta = 0, \quad \text{für } z = \mp 1/2$$

angesetzt (d.h. $k^{(ex)} \gg k^{(in)}$) und für die Geschwindigkeit werden nur die beiden Grenzfälle $\eta^{(ex)} \gg \eta^{(in)}$ (feste Randbedingungen) bzw. $\eta^{(ex)} \ll \eta^{(in)}$ (freie Randbedingungen) betrachtet.

5.2 Der Einfluß der Feldrichtung

Die Quelle für das magnetische Potential Φ ist wie in der Elektrostatik die Ladungsdichte. In dipolaren Medien wie magnetischen Flüssigkeiten ist die Monopoldichte durch die Divergenz der Dipoldichte (der Magnetisierung) gegeben, die mit der linearisierten Zustandsgleichung (5.11) im homogenen Feld proportional zur Ableitung der Temperatur in Feldrichtung ist:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -K(\mathbf{h} \cdot \nabla)T.$$

Je nach Orientierung $\mathbf{h}$ des äußeren Feldes führt eine gegebene Temperaturverteilung auf unterschiedliche Polverteilungen. Umgekehrt geht von dem Magnetfeld $\nabla\Phi$, das von der Polldichte erzeugt wird, in linearer Näherung nur die Projektion auf die Magnetisierungsrichtung $\mathbf{h}$ ein, denn die zu $\mathbf{h}$ orthogonale Komponente verursacht nur quadratische Korrekturen der Magnetisierung. Infolgedessen kann das Gleichungssystem (5.17) auf beliebige Feldrichtung verallgemeinert werden, indem die z -Ableitung von Φ und Θ in (5.17a) bzw. (5.17c) durch die Richtungsableitung $\mathbf{h} \cdot \nabla$ ersetzt wird. Die entsprechende Änderung angewandt auf die statische Temperatur- und Feldverteilung führt auf einen Gewichtungsfaktor h_z^2 für den magnetischen Auftriebsterm $Rm\Delta_2\Theta$. Für $I=1$, d.h. für isotrope Suszeptibilität (vgl. Abschnitt 5.3), läßt sich der Linearteil von (5.17) nach Substitution von (b) und (c) in (a) auf eine Gleichung für Ψ zusammenfassen:

$$\Delta^4\Delta_2\Psi - Ra\Delta\Delta_2^2\Psi - h_z^2Rm\Delta\Delta_2^2\Psi + Rm(\mathbf{h} \cdot \nabla)^2\Delta_2^2\Psi = 0. \quad (5.21)$$

Da der Richtungsvektor nur quadratisch vorkommt, spielt sein Vorzeichen keine Rolle. Die Symmetrie der Gleichung bezüglich der Feldumkehr ist eine unmittelbare Konsequenz der Symmetrie des Suszeptibilitätstensors (vgl. (5.11)) und gilt deshalb unabhängig von den sonstigen Näherungen, die bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen gemacht wurden.

Wenn das Feld parallel oder senkrecht zur z -Achse ist, dann erfüllt der Ansatz

$$\Psi = \cos(\pi z)\cos(a_x x + a_y y) \quad (5.22)$$

sowohl die Differentialgleichung (5.21) als auch die Randbedingungen (5.20) mit $\eta^{(ex)} \ll \eta^{(in)}$, $k^{(ex)} \gg k^{(in)}$ und $\mu^{(ex)} \ll \mu^{(in)}$ bzw. $\mu^{(ex)} \gg \mu^{(in)}$. Es ist deshalb zu erwarten, daß der Ansatz (5.22) auch für beliebige Feldrichtungen eine akzeptable Näherung für die Lösung der Bewegungsgleichung bildet.

Um die Lösbarkeitsbedingung für diese Näherung an Ψ aufstellen zu können, muß die Bedingung (5.21) abgeschwächt werden. Wir verwenden ein Galerkinverfahren (z.B. Finlayson 1972), indem wir die Gültigkeit von (5.21) nur in dem von Ψ aufgespannten Unterraum fordern. Nach Multiplikation von (5.21) mit (5.22) und Integration über die Flüssigkeitsschicht folgt:

$$Ra^{(0)} = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2} - h_z^2 Rm + Rm \frac{h_z^2 \pi^2 + (h \cdot a)^2}{\pi^2 + a^2}. \quad (5.23)$$

Die Lösbarkeitsbedingung für Ψ schränkt die Unabhängigkeit der Parameter in der Bewegungsgleichung auf die Relation (5.23) ein. Da wir die archimedische Rayleigh-Zahl als abhängige Variable betrachten, stellt sie die Stabilitätsgrenze für den ruhenden Zustand der Flüssigkeit als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl, der Feldrichtung und des Wellenvektors dar. Wir bezeichnen die Stabilitätsgrenze mit $Ra^{(0)}$. Bei verschwindendem Magnetfeld vereinfacht sich (5.23) auf die bekannte Lösung für nichtmagnetische Flüssigkeiten (Chandrasekhar 1961); $Ra^{(0)}$ nimmt seinen minimalen Wert $Ra_c = 27\pi^4/4$ bei der kritischen Wellenzahl $a_c = \pi/\sqrt{2}$ an und die Orientierung des Wellenvektors ist unbestimmt. Im äußeren Magnetfeld muß $Ra^{(0)}$ bezüglich Betrag und Richtung von a minimalsiert werden, um die kritische archimedische Rayleigh-Zahl und den zugehörigen kritischen Wellenvektor zu bestimmen. Es genügt, positive magnetische Rayleigh-Zahlen zu betrachten, denn negative Werte von Rm sind nur für unphysikalische Materialgrößen z.B. $\mu < 0$ möglich. Bei festem Betrag der Wellenzahl nimmt $Ra^{(0)}$ den kleinsten Wert an, wenn der Wellenvektor a senkrecht zur Feldrichtung h orientiert ist ($a \cdot h = 0$), d.h. wenn die Konvektionsrollen parallel zur horizontalen Komponente des Magnetfeldes verlaufen. Im vertikalen Feld ist diese Bedingung stets erfüllt, weil der Wellenvektor auf die horizontale Ebene beschränkt ist. Abgesehen von der Orientierung des Wellenvektors hat das horizontale Feld keinen Einfluß auf die archimedische Rayleigh-Zahl. In der Beziehung (5.23) erscheinen nur noch Beiträge, die proportional zur vertikalen Komponente sind. Wir können deshalb die folgende Diskussion auf vertikales Feld ($h_z^2 = 1$) beschränken.

Das vertikale Feld steuert zwei Summanden unterschiedlichen Vorzeichens zur archimedischen Rayleigh-Zahl $Ra^{(0)}$ bei. Der erste beschreibt den magnetischen Auftrieb wie er im ungestörten Feldgradienten herrscht. Er verkleinert die kritische archimedische Rayleigh-Zahl um die magnetische Rayleigh-Zahl und übt keinen Einfluß auf die kritische Wellenzahl aus. Die Wirkung des ersten Terms bildete die Grundlage zur Abschätzung der Eigenschaften in Kapitel 4. Der zweite Term wirkt stabilisierend, weil er die archimedische Rayleigh-Zahl vergrößert. Er ist zwar stets dem Betrag nach kleiner als der erste, kann also dessen destabilisierende Wirkung nicht vollständig aufheben, aber er ist auch nicht vernachlässigbar, denn für $a^2 < \pi^2$ haben beide Terme vergleichbare Größenordnung. Mit zunehmender Wellenzahl wird der relative Einfluß des stabilisierenden Beitrags jedoch kleiner. Es ist deshalb anzunehmen, daß die kritische Wellenzahl mit Rm anwächst. Die Forderung, daß $Ra^{(0)}$ minimal ist, setzt das Verschwinden der Ableitung

$$d Ra^{(0)} / d a^2 = 0$$

voraus, und man erhält für die kritische Wellenzahl a_c

$$Rm = (2a_c^2 - \pi^2) \frac{(a_c^2 + \pi^2)^4}{a_c^4 \pi^2} \quad (5.24)$$

und, eingesetzt in (5.23), die kritische archimedische Rayleigh-Zahl

$$Ra_c = (2\pi^2 - 2a_c^2) \frac{(a_c^2 + \pi^2)^3}{a_c^2 \pi^2} \quad (5.25)$$

Der Verlauf von $a_c(Rm)$ nach Gleichung (5.24) und von $Ra_c(Rm)$, der sich durch Elimination von a_c in (5.24) und (5.25) ergibt, ist in Diagramm 5.2 bzw. 5.3 auf Seite 75 dargestellt (Kurvenparameter $I=1$; die Erläuterung der Kurven mit $I \neq 1$ folgt im nächsten Abschnitt). Erwartungsgemäß übertrifft die Summe der beiden Rayleigh-Zahlen am Einsatzzpunkt der Konvektion den kritischen Wert der archimedischen Rayleigh-Zahl bei $Rm=0$ und die kritische Wellenzahl steigt mit zunehmendem magnetischen Auftrieb an.

Obwohl die vorausgehenden Ergebnisse unter idealisierten Bedingungen gewonnen wurden, enthalten sie alle charakteristischen Auswirkungen des magnetischen Auftriebs auf den Übergang zur Konvektion. Wir werden deshalb die analytische Lösung benutzen, um die Feldstörungen und ihre Wirkung zu veranschaulichen, bevor die quantitativen Aspekte in den folgenden Abschnitten genauer untersucht werden.

In Diagramm 5.1a sind die Stromlinien der Konvektion in einer von unten beheizten Flüssigkeitsschicht dargestellt, wie sie sich aus dem Geschwindigkeitspotential Ψ mit $a_y=0$ ergeben. Die Konvektionsströmung ist an eine Temperaturverteilung

$$\Theta = \cos(\pi z) \cos(ax)$$

In der Flüssigkeit gekoppelt. Je nach Orientierung h des äußeren Feldes führt die Temperaturverteilung Θ auf unterschiedliche Polverteilungen. Das zugehörige magnetische Potential Φ ist zusammen mit seinen Feldlinien $\nabla\Phi$ für horizontales Feld ($h_x^2=1$) in Diagramm 5.1c und für vertikales Feld ($h_z^2=1$) in Diagramm 5.1b dargestellt.

a) Vertikales Feld

Im vertikalen äußeren Feld erzeugt der Gradient der Magnetisierung einen inneren Feldgradienten, der destabilisierend wirkt. Aufwärtsströmende Flüssigkeit ist wärmer als ihre Umgebung und deshalb schwächer magnetisiert. Aufgrund des Magnetisierungsunterschieds erfährt die Flüssigkeit im Feldgradienten eine aufwärts gerichtete Kraft. Da die Feldstörungen der Konvektion das äußere Feld im Bereich der Aufwärtsströmung verstärken, wird der Magnetisierungsunterschied und damit der magnetische Auftrieb verkleinert. Entsprechendes gilt mit umgekehrten Vorzeichen für abwärts strömende kalte Flüssigkeit.

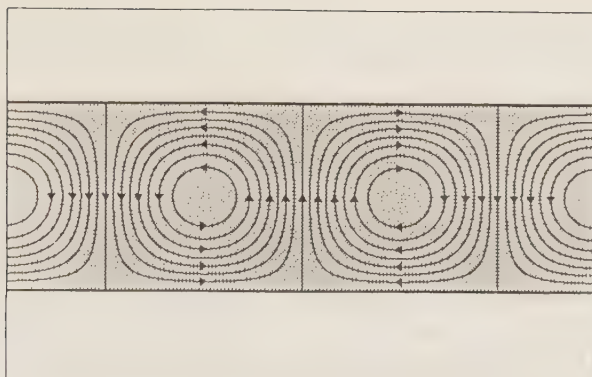
b) Horizontales Feld

Das horizontale Feld besitzt keine destabilisierende Wirkung, weil der homogene Magnetisierungsgradient das Feld nicht beeinflusst. Mit der inhomogenen Temperaturverteilung in horizontaler Richtung durch Konvektion werden jedoch vertikale Feldgradienten erzeugt. Von der zur Schichtmitte symmetrisch angeordneten Feldverteilung dominiert die Wirkung des Gradienten an der kalten Oberseite, weil dort die Magnetisierung der Flüssigkeit größer ist als an der erwärmten Unterseite. Im Bereich aufsteigender Flüssigkeit zeigt der Feldgradient nach unten und ist damit der Strömung entgegengerichtet. Der lokale Feldgradient ist zwar auch im Bereich absinkender Flüssigkeit zur Schichtmitte hin orientiert, aber da die Feldrichtung dort dem äußeren Feld entgegengerichtet ist, nimmt die Gesamtfeldstärke nach außen zu, was bedeutet, daß auch die Abwärtsströmung vom Magnetfeld behindert wird.

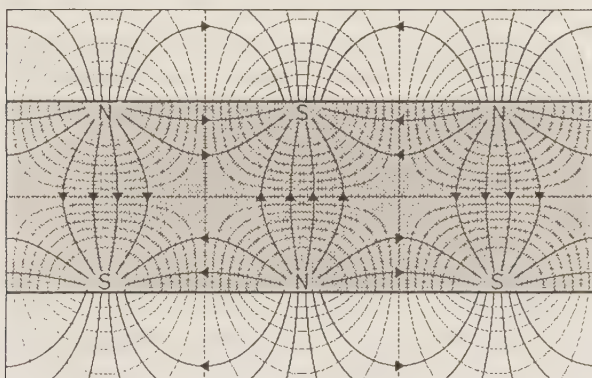
Da die entmagnetisierenden Felder $\nabla\Phi$ ihrer Ursache stets entgegenwirken, ist ihr Einfluß generell stabilisierend. Im horizontalen Feld wird die stabilisierende Wirkung aufgehoben, wenn sich die Konvektionsrollen entlang des äußeren Feldes orientieren, denn dann ist die Temperatur und die Magnetisierung in Feldrichtung konstant und die Feldstörungen verschwinden. Die Möglichkeit, den stabilisierenden Einfluß des entmagnetisierenden Feldes zu vermeiden, gibt es im vertikalen Feld nicht. Aber mit zunehmender Wellenzahl nimmt die Vertikalkomponente des Störfeldes zugunsten seiner Horizontalkomponente ab. Die damit verbundene Schwächung des stabilisierenden Beitrags wird noch unterstützt, wenn die Permeabilität der Flüssigkeit anisotrop ist (vgl. Abschnitt 5.3).

Diagramm 5.1 Verteilung des von der thermischen Konvektion hervorgerufenen Magnetfeldes für vertikales äußeres Feld (b) bzw. für horizontales Feld (c). Die Feldlinien (durchgezogen) stehen senkrecht auf den Äquipotentiallinien von Φ (gepunktet). Die Stromlinien (a) fallen mit den Äquipotentiallinien $\partial_x\Psi$ zusammen.

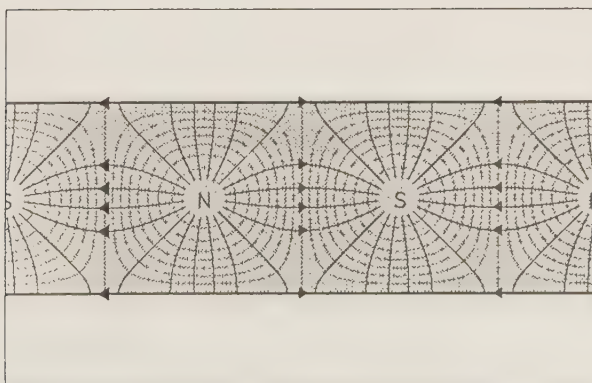
5.1a



5.1b



5.1c



5.3 Anisotropie der Flüssigkeit

Ferrofluide sind als dipolare Medien nicht isotrop. Mit dem äußeren Magnetfeld wird eine Raumrichtung ausgezeichnet. Abgesehen von der im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Abhängigkeit des lokalen Feldes von der äußeren Feldrichtung müssen auch Änderungen der Materialgrößen wie Wärmeleitfähigkeit, Viskosität und Suszeptibilität in die Überlegung einbezogen werden. Den bei weitem größten Beitrag zur Anisotropie der Flüssigkeitseigenschaften liefert die Suszeptibilität (vgl. Kap. 3). Ihr Einfluß wiegt umso schwerer, als sie auch für das lokale Feld verantwortlich ist, das die treibende Kraft für magnetische Konvektion bildet.

Aus der linearisierten magnetischen Zustandsgleichung (5.11) erhalten wir für den Suszeptibilitätstensor im vertikalen Magnetfeld

$$(\chi_{ij}) = \left(\frac{\partial M_i}{\partial H_j} \right) = \begin{pmatrix} \chi^{(\text{tot})} & 0 & 0 \\ 0 & \chi^{(\text{tot})} & 0 \\ 0 & 0 & \chi \end{pmatrix}.$$

Der Suszeptibilitätstensor enthält mit den Suszeptibilitäten parallel bzw. senkrecht zur Feldrichtung nur noch zwei unabhängige Parameter χ bzw. $\chi^{(\text{tot})}$.

Wenn die Zustandsgleichung linear ist, sind χ und $\chi^{(\text{tot})}$ identisch und der Suszeptibilitätstensor ist isotrop. Bei Abweichungen vom linearen Verhalten ist die Anisotropie des Tensors vom Ausmaß und vom Vorzeichen der mittleren Krümmung der Funktion $M(H)$ abhängig. Als Maß für die Anisotropie verwenden wir das in Abschnitt 5.1 eingeführte innere Permeabilitätsverhältnis

$$I = \frac{1 + \chi^{(\text{tot})}}{1 + \chi}.$$

Das Permeabilitätsverhältnis I ist größer als 1, wenn die Krümmung der Zustandsfunktion, wie bei der Langevin-Funktion, negativ ist, und kleiner als 1 bei positiver Krümmung. Für unser Standardferrofluid liegt I im Intervall

$$1 \leq I \leq 2.$$

In der folgenden Diskussion werden wir jedoch das gesamte Intervall

$$0 \leq I \leq \infty$$

zulassen, um die theoretisch möglichen Grenzen des Beitrags der Anisotropie abstecken zu können.

Das linearisierte Gleichungssystem (5.17) ist mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\Psi &\sim \cos(\pi z) \cos(ax), \\ \Theta &\sim \cos(\pi z) \cos(ax) \text{ und} \\ \Phi &\sim \sin(\pi z) \cos(ax)\end{aligned}\tag{5.26}$$

für das Geschwindigkeitspotential Ψ , die Temperaturstörung Θ und das magnetische Potential Φ exakt lösbar, wenn die Randbedingungen $\eta^{(ex)} \ll \eta^{(in)}$, $k^{(ex)} \gg k^{(in)}$ und $\mu^{(ex)} \ll \mu^{(in)}$ zugrunde gelegt werden. Als Lösbarkeitsbedingung erhalten wir die neutrale Beziehung

$$Ra(0) = \frac{(a^2 + \pi^2)^3}{a^2} - Rm + Rm \frac{\pi^2}{\pi^2 + Ia^2}\tag{5.27}$$

für die archimedische Rayleigh-Zahl als Funktion der Wellenzahl, der magnetischen Rayleigh-Zahl und des Permeabilitätsverhältnisses. Die anisotrope Permeabilität verändert nur den stabilisierenden (positiven) Beitrag des magnetischen Auftriebs, was anschaulich klar ist, wenn man berücksichtigt, daß nur die Vertikalkomponente des von der inneren Polverteilung hervorgerufenen Feldes in die Stabilitätsanalyse eingeht (vgl. Diagramm 5.1b). Infolge der anisotropen Permeabilität wird das Verhältnis zwischen vertikaler und horizontaler lokaler Feldstärke beeinflusst. Für $I > 1$ nimmt die indifferente Horizontalkomponente auf Kosten der stabilisierenden Vertikalkomponente des inneren Feldes zu, d.h. der stabilisierende Term in (5.27) wird kleiner und im Limes $I = \infty$ verschwindet er schließlich ganz. Im umgekehrten Fall $I < 1$ wächst der stabilisierende Beitrag an, bis er, bei $I = 0$, den destabilisierenden magnetischen Auftrieb vollständig kompensiert und nur noch der archimedische Auftrieb wirksam ist.

Um den Einfluß der Anisotropie quantitativ bestimmen zu können, muß die kritische Rayleigh-Zahl und die kritische Wellenzahl berechnet werden.

Das Minimum von $Ra^{(0)}$ wird bei der kritischen Wellenzahl a_c angenommen, deren Abhängigkeit von Rm implizit durch

$$Rm = (2a_c^2 - \pi^2) \frac{(a_c^2 + \pi^2)^2 (Ia_c^2 + \pi^2)^2}{Ia_c^4 \pi^2} \quad (5.28)$$

beschrieben wird. Die zugehörige kritische Rayleigh-Zahl Ra_c folgt durch Einsetzen von (5.28) in (5.27) zu

$$Ra_c = \left[(2\pi^2 - a_c^2) - (2a_c^2 - \pi^2)I \frac{a_c^2}{\pi^2} \right] \frac{(a_c^2 + \pi^2)^2}{a_c^2}. \quad (5.29)$$

In den Diagrammen 5.2 und 5.3 ist der Verlauf von $a_c(Rm)$ und $Ra_c(Rm)$ für verschiedene Anisotropieparameter I aufgetragen. Alle Kurven $Ra_c(Rm)$ liegen zwischen den beiden Geraden

$$Ra_c(Rm) = Ra_c(0) \quad \text{für } I = 0 \text{ und} \quad (5.30a)$$

$$Ra_c(Rm) = Ra_c(0) - Rm \quad \text{für } I = \infty. \quad (5.30b)$$

Die kritische Wellenzahl ist in beiden Grenzfällen konstant und gleich dem Wert bei reiner archimedischer Konvektion $a_c = \pi/\sqrt{2}$.

Für $0 < I < \infty$ wird der von I abhängige Term durch Anpassung der kritischen Wellenzahl modifiziert. Da die kritische Wellenzahl für große magnetische Rayleigh-Zahlen divergiert, verschwindet der stabilisierende Beitrag schließlich und $Ra_c(Rm)$ besitzt wie (5.30b) die Steigung -1 , während sie im Limes $Rm = -\infty$ gegen Null konvergiert, so daß $Ra_c(Rm)$ wie (5.30a) gegen einen konstanten Wert strebt. Im Bereich des Übergangs zwischen beiden Extremfällen nimmt die kritische Wellenzahl linear mit der magnetischen Rayleigh-Zahl Rm zu. Für größere oder kleinere Werte von Rm ist der Anstieg wesentlich schwächer (proportional zu $(Rm)^{1/6}$ bzw. $(-Rm)^{-1/4}$). Dennoch wächst die kritische Wellenzahl im experimentell zugänglichen Bereich um einen Faktor drei an, was eines der signifikantesten Merkmale der Konkurrenz zwischen magnetischen und archimedischen Auftriebskräften bildet.

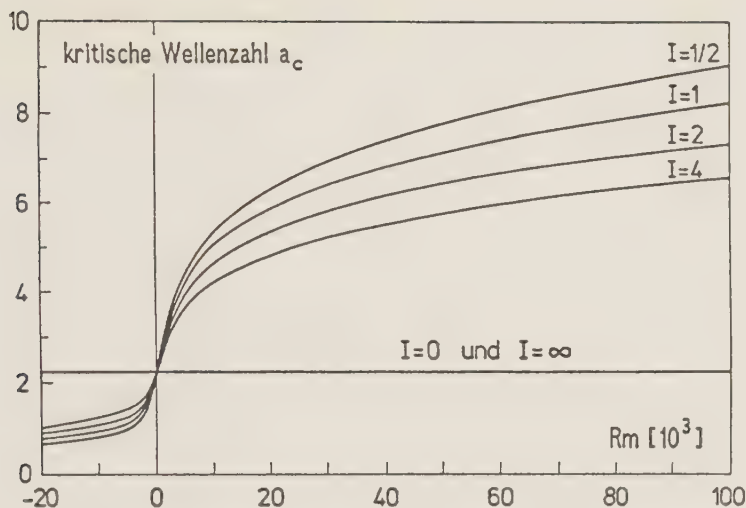


Diagramm 5.2 Kritische Wellenzahl als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl für verschiedene Werte des inneren Permeabilitätsverhältnisses I .

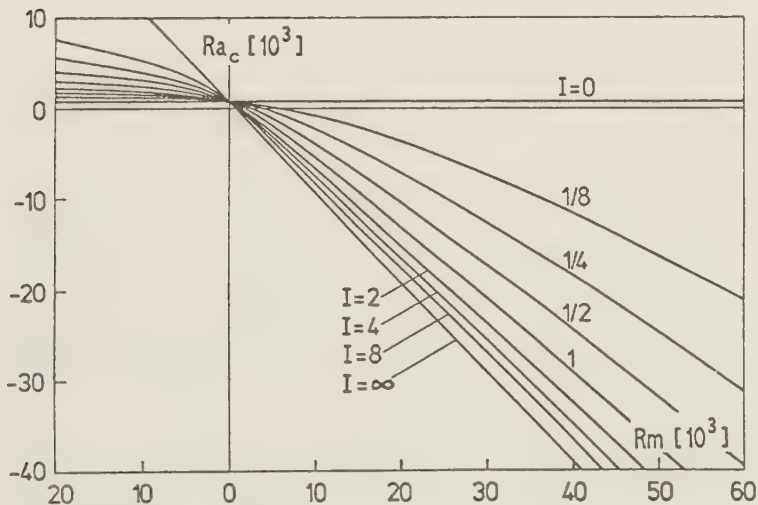


Diagramm 5.3 Kritische archimedische Rayleigh-Zahl als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl für verschiedene Werte des inneren Permeabilitätsverhältnisses I .

5.4 Einfluß der Randbedingungen

Die bisherigen Betrachtungen wurden unter idealisierten Randbedingungen angestellt. Für sie erfüllten die Funktionen (5.26) sowohl die Bewegungsgleichungen als auch die Randbedingungen exakt. Das hatte den Vorteil, daß einfache analytische Ausdrücke für die kritische Rayleigh-Zahl Ra_c und die Wellenzahl a_c angegeben werden konnten, anhand derer sich die Auswirkungen der Feldrichtung und der Anisotropie auf den magnetischen Beitrag der Konvektion veranschaulichen ließen. Da sich die Schlußfolgerungen im wesentlichen aus der Feldverteilung im Innern der Ferrofluidschicht ergaben, bleiben die qualitativen Aussagen beim Übergang zu realistischen Randbedingungen bestehen. Zum quantitativen Vergleich mit gemessenen Werten sind die bisherigen Ergebnisse jedoch unbrauchbar. Im Hinblick auf unser Ziel, die magnetischen Kräfte bei der Konvektion zu verstehen, sind wir speziell an den Auswirkungen unterschiedlicher magnetischer Randbedingungen interessiert, die durch das äußere Permeabilitätsverhältnis

$$J = \frac{\mu^{(ex)}}{\mu}$$

charakterisiert werden. Wie im Experiment befinde sich die Flüssigkeit zwischen zwei festen Platten ($\eta^{(ex)} \gg \eta^{(in)}$), deren Wärmeleitfähigkeit sehr viel größer als die des Ferrofluids sei ($k^{(ex)} \gg k^{(in)}$).

Für die realistischen Randbedingungen kann das Gleichungssystem (5.17) nicht mehr analytisch gelöst werden. Nach wie vor sind aber Ψ , Θ und Φ für die linearisierten Gleichungen in horizontaler Richtung in Form einer Fourier-Reihe mit unabhängigen Koeffizienten darstellbar, und mit dem Separationsansatz (5.18) erhalten wir für jede Komponente der Reihe eine gewöhnliche Differentialgleichung für die z -Abhängigkeit der drei Funktionen.

Die Differentialgleichungen lassen sich z.B. mit Mehrschrittverfahren vom Runge-Kutta-Typ, die besonders anpassungsfähig an unterschiedliche Randbedingungen sind, direkt aufintegrieren. Allerdings erweist sich das Verfahren bei den großen Rayleigh-Zahlen, die bei der Konkurrenz zwischen magnetischen und archimedischen Kräften zur Konvektion nötig sind, als numerisch instabil. Das parasitäre exponentielle Anwachsen von nume-

rischen Fehlern in die Richtung des Eigenvektors mit dem größten Eigenwert läßt sich zwar durch Orthonormieren der Lösungsvektoren nach jedem Integrationschritt abfangen, was jedoch mit unverhältnismäßig großem Aufwand an Rechenzeit verbunden ist.

Geringere Flexibilität, dafür aber größere Stabilität bieten Reihenentwicklungen der zu berechnenden Funktionen. Üblicherweise legt man der Entwicklung einen orthogonalen Funktionenansatz wie z.B. die trigonometrischen Funktionen zugrunde, für die die Integration besonders einfach wird. Läßt man dagegen die Forderung der Orthogonalität fallen, dann kann man durch Wahl geeigneter Ansätze, z.B. solchen, die die Randbedingungen erfüllen, sehr rasche Konvergenz erreichen. Der zusätzliche Aufwand, der bei der Integration entsteht, wird durch die kleine erforderliche Schrittzahl bei weitem kompensiert. In vielen Fällen reichen schon ein oder zwei Funktionen aus, um Ergebnisse zu erzielen, die näher am exakten Wert liegen als jedes Experiment an Genauigkeit rechtfertigt (Finlayson 1972). Eine Reihenentwicklung nach sehr vielen Funktionen ist mit dieser Methode nicht sinnvoll.

Wir folgen dem Vorschlag von Finlayson (1970), indem wir die z -Abhängigkeit von Ψ , Θ und Φ in Potenzreihen entwickeln:

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \sum_{i=1}^N A_i (z^2 - 1/4)^{i+1} \\ \Theta(z) &= \sum_{i=1}^N B_i (z^2 - 1/4)^i, \\ \Phi(z) &= \sum_{i=1}^{N+2} C_i z^{2i-1}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen für das Geschwindigkeitspotential und die Temperatur, erfüllen die Ansatzfunktionen für das magnetische Potential die Randbedingungen im allgemeinen nicht. Deshalb wurde die Dimension des Funktionenraums für das magnetische Potential größer gewählt.

Die Entwicklungskoeffizienten A_i , B_i und C_i werden bestimmt, indem wir fordern, daß der Linearteil der Geschwindigkeitsgleichung (5.17a) orthogonal zu jedem Summanden der Reihenentwicklung für die Geschwindigkeit und der Linearteil der Temperaturgleichung (5.17b) orthogonal zu jedem Summanden der Entwicklung von Θ ist (Galerkin-Verfahren). Für das magnetische Potential müssen bei der entsprechenden Integration die

nicht verschwindenden Randterme mitberücksichtigt werden. Auf diese Weise erhält man ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten, das genau dann eine nichttriviale Lösung besitzt, wenn seine Determinante verschwindet. Die Lösbarkeitsbedingung liefert die Rayleigh-Zahl $Ra^{(0)}$ als Funktion von a , Rm , I , J und h . Wie vorher erhält man die kritischen Werte der Rayleigh-Zahl und der Wellenzahl, indem $Ra^{(0)}$ bezüglich Betrag und Richtung des Wellenvektors minimalisiert wird. In den Diagrammen 5.4 und 5.5 sind die Lösungen für $a_c(Rm)$ und $Ra_c(Rm)$ für verschiedene Werte der magnetischen Randbedingungen J dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber wurde $I=h_z^2=1$, d.h. isotropes Ferrofluid im vertikalen Feld gewählt.

Qualitativ zeigt der Einfluß von J viele Parallelen zu den Auswirkungen der Anisotropie I (vgl. Diagramm 5.2 und 5.3). Alle Kurven liegen zwischen den Grenzfunktionen (5.30a) und (5.30b) und mit zunehmendem J nähern sie sich der letzten an. Im Gegensatz zur Anisotropie wird aber bei der Zunahme des Permeabilitätsverhältnisses vom unteren Grenzwert $J=0$ bis zum oberen Grenzwert $J=\infty$ nur ein relativ schmaler Bereich überstrichen. Die Funktionen für das im Experiment vorliegende Verhältnis $J=1/2$ unterscheiden sich nur geringfügig vom idealisierten Fall $J=0$. Dadurch wird erneut die Nützlichkeit der analytischen Lösungen der Abschnitte 5.2 und 5.3 unterstrichen.

Zur Erklärung des Einflusses der magnetischen Randbedingungen verweisen wir auf die Feldverteilung im Inneren des Ferrofluids, die in den Diagrammen 5.6 für verschiedene J dargestellt ist. Mit zunehmendem J , d.h. mit zunehmender äußerer Permeabilität wird das von der Polverteilung im Ferrofluid hervorgerufene Feld verstärkt in den Außenraum gedrängt. Dabei wird die stabilisierende Vertikalkomponente des inneren Feldes verkleinert. Der Einfluß von J reicht aber weder zur vollständigen Aufhebung des stabilisierenden Beitrags von Rm aus, wenn $J=\infty$ ist, noch vermag er, bei $J=0$, den destabilisierenden Beitrag von Rm vollständig zu kompensieren, weil der Wirkungsbereich von J auf die Randschicht beschränkt ist.

Zur Bestimmung der kritischen Werte von Ra und a mußte das Gleichungssystem selbst nicht gelöst werden. Die Lösung wurde und wird jedoch benötigt, um die Feldverteilung im Inneren des Ferrofluids veranschaulichen zu können und um die Amplitude im folgenden Abschnitt 5.5 berechnen zu können.

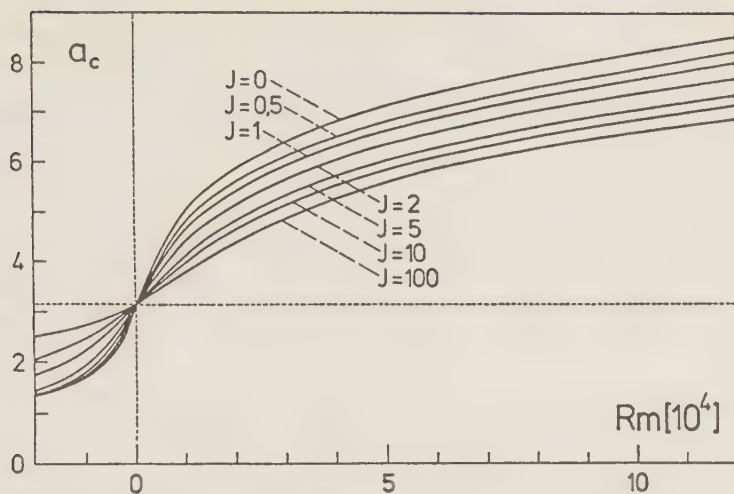


Diagramm 5.4 Kritische Wellenzahl als Funktion von Rm für verschiedene Werte des äußeren Permeabilitätsverhältnisses J .

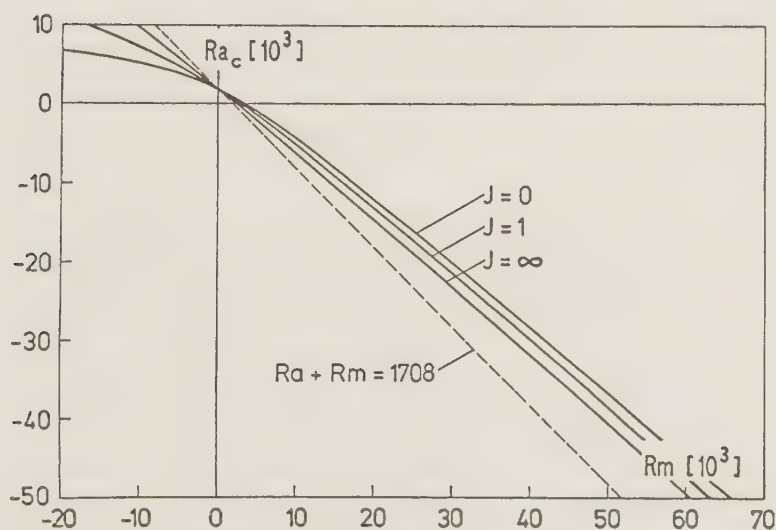


Diagramm 5.5 Kritische archimedische Rayleigh-Zahl als Funktion von Rm für verschiedene Werte des äußeren Permeabilitätsverhältnisses.

Das lineare homogene Gleichungssystem liefert die Lösung für $\Psi^{(1)}$, $\Theta^{(1)}$ und $\Phi^{(1)}$ nur bis auf einen gemeinsamen Faktor. Die Unbestimmtheit wird durch eine geeignete Normierungsvorschrift aufgehoben. Wir wählen

$$\langle \Theta^{(1)} W^{(1)} \rangle = 1, \quad (5.32)$$

wobei $W^{(1)} = -\Delta_2 \Psi^{(1)}$ die z-Komponente der Konvektionsgeschwindigkeit ist (vgl. (5.14)), und die eckige Klammer für die Mittelwertbildung über die Flüssigkeitsschicht steht. Damit besitzt die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems die Form

$$\varepsilon \Psi^{(1)}, \varepsilon \Theta^{(1)} \text{ und } \varepsilon \Phi^{(1)}$$

mit der gemeinsamen Amplitude ε und den jetzt eindeutigen Funktionen $\Psi^{(1)}$, $\Theta^{(1)}$ und $\Phi^{(1)}$. Mit dem oberen Index (1) wird angedeutet, daß es sich um die Lösung erster Ordnung handelt. Die Wahl der Normierung liefert einen besonders einfachen Zusammenhang zwischen der Amplitude ε und dem Wärmestrom durch die Flüssigkeit, der, gemessen in Einheiten des konduktiven Beitrags, als Nußelt-Zahl Nu bezeichnet wird. Es gilt:

$$Nu = 1 + \langle \Theta W \rangle, \quad (5.33)$$

wobei der erste Term den Beitrag der Wärmeleitung und der zweite den Beitrag der Konvektion repräsentiert. In niedrigster Ordnung kann die Nußelt-Zahl mit den Lösungen $\varepsilon \Theta^{(1)}$ und $\varepsilon W^{(1)}$ ausgedrückt werden, d.h. zusammen mit der Normierungsvorschrift (5.32) gilt:

$$Nu = 1 + \varepsilon^2. \quad (5.34)$$

Wie die Amplitude ε mit der Rayleigh-Zahl Ra ansteigt, wird im folgenden Abschnitt 5.5 berechnet werden.

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems, die mit den Ansätzen (5.31) und $N=4$ berechnet wurden, sind in den Diagrammen 5.7 und 5.8 für realistische Randbedingungen ($J=1/2$) bzw. für das Gegenstück zu idealisierten Randbedingungen, nämlich $J=\infty$, dargestellt. Im Gegensatz zu den

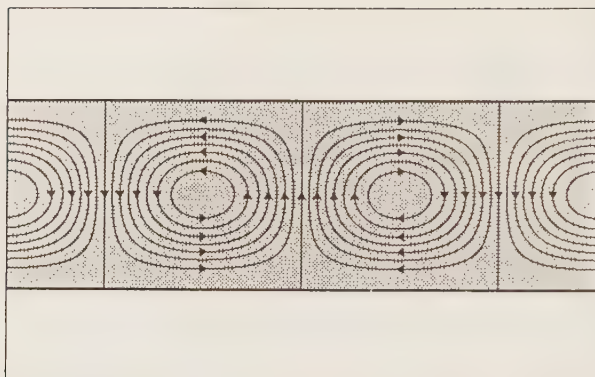
idealisierten Randbedingungen, wo alle drei Funktionen cosinus-förmiges Profil annehmen (vgl. (5.26)), unterscheiden sich die Lösungen für W , Θ und H_z bei realistischen Randbedingungen stark voneinander. Die Geschwindigkeit ist am Rand stetig und differenzierbar, die Temperatur, deren Randbedingung nicht verändert wurde, ist stetig und die z -Komponente des Magnetfeldes ist im allgemeinen unstetig. Bemerkenswert ist, daß das Magnetfeld in der Randschicht des Ferrofluids nicht verschwindet. Der relative Wert, verglichen mit der Feldstärke bei $z=0$, wächst mit der magnetischen Rayleigh-Zahl und mit dem Permeabilitätsverhältnis J an. Die äußere Feldstärke nimmt monoton mit J ab und verschwindet im Grenzfall $J=\infty$ ganz.

Trotz erheblicher Änderungen in der Feinstruktur der Profile bleibt der Einfluß der magnetischen Randbedingungen auf Größen wie die kritische Rayleigh-Zahl Ra_c oder die kritische Wellenzahl a_c relativ klein. Die Änderungen sind jedoch, wie gezeigt werden wird, entscheidend für sekundäre Effekte wie die Selektion des Konvektionsmusters.

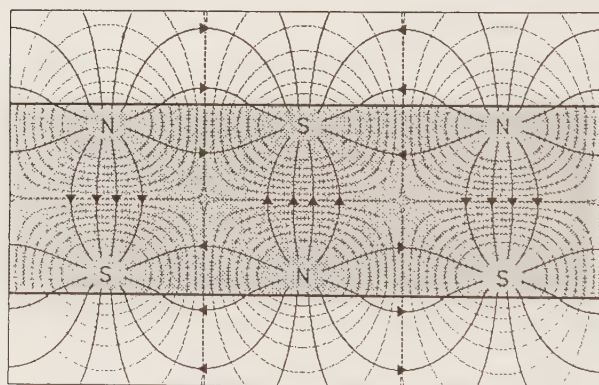
Diagramm 5.6 Verteilung des von der thermischen Konvektion hervorgerufenen Magnetfeldes für $J=1/2$ (b) bzw. für $J=\infty$ (c). Die Feldlinien (durchgezogen) stehen senkrecht auf den Äquipotentiallinien von Φ (gepunktet). Die Stromlinien (a) fallen mit den Äquipotentiallinien $\partial_x \Psi$ zusammen.

Diagramm 5.7 z -Komponente W der Konvektionsgeschwindigkeit (a), Störung Θ des Temperaturgradienten (b) und z -Komponente H_z der Feldstörungen (c) als Funktion von z für $J=1/2$ und verschiedene magnetische Rayleigh-Zahlen Rm (1: $Rm=0$, 2: $Rm=5000$, 3: $Rm=15000$, 4: $Rm=30000$, 5: $Rm=60000$, 6: $Rm=120000$). Die Werte von Rm wurden so gewählt, daß die kritische Wellenzahl von $a_c \approx 3$ in äquidistanten Schritten auf $a_c \approx 8$ anwächst (vgl. Diagramm 5.4). Typische Werte der Einheiten sind für die Geschwindigkeit: $50 \mu\text{m/s}$, für die Temperatur: 20 K und für das Magnetfeld: 10^3 A/m .

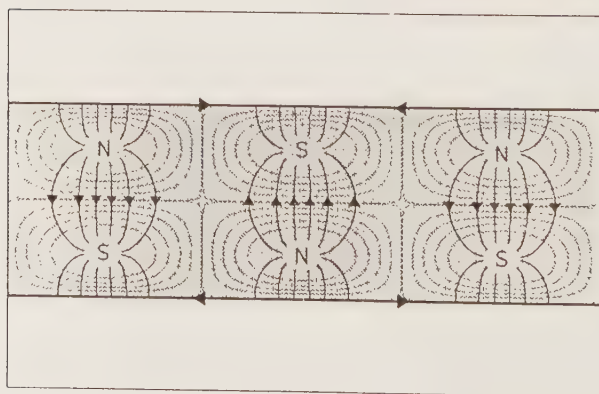
Diagramm 5.8 z -Komponente W der Konvektionsgeschwindigkeit (a), Störung Θ des Temperaturgradienten (b) und z -Komponente H_z der Feldstörungen (c) als Funktion von z für $J=\infty$ und verschiedene magnetische Rayleigh-Zahlen Rm (1: $Rm=0$, 2: $Rm=5000$, 3: $Rm=15000$, 4: $Rm=30000$, 5: $Rm=60000$, 6: $Rm=120000$).



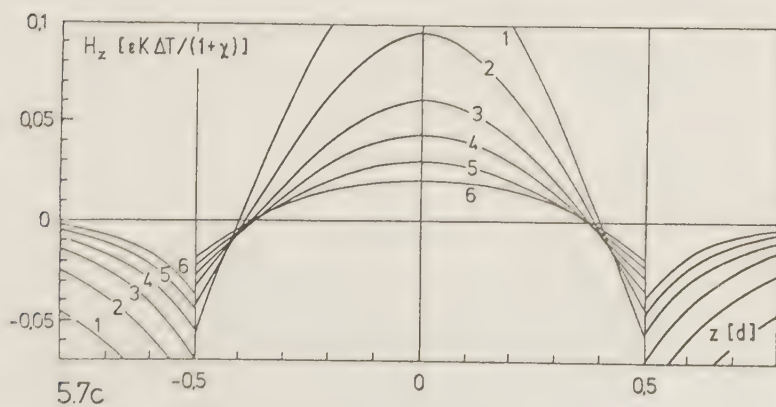
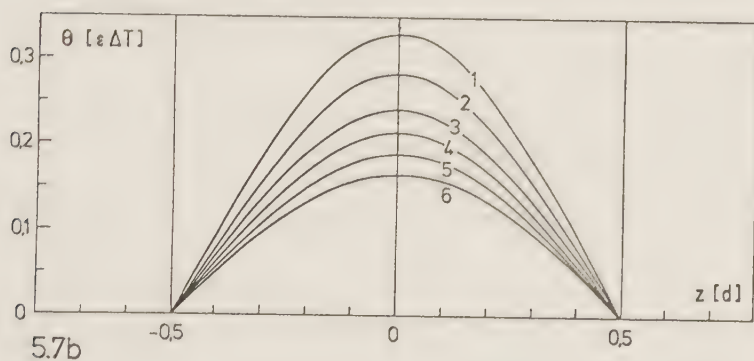
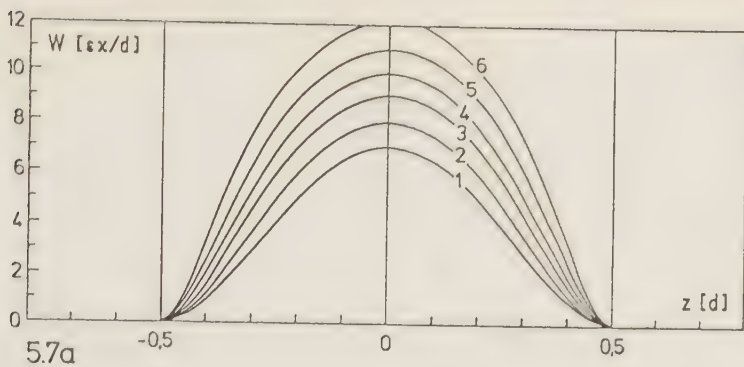
5.6a

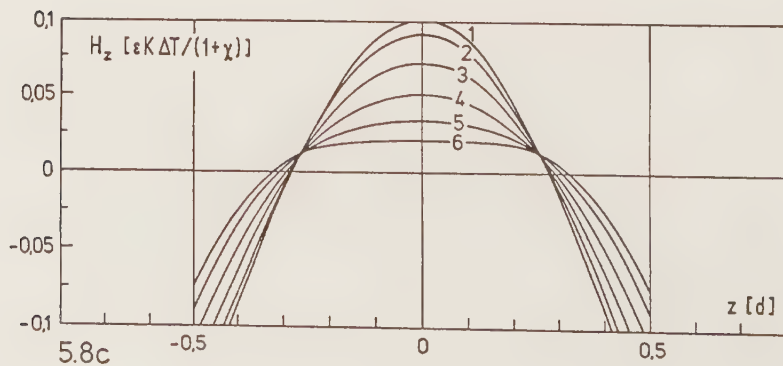
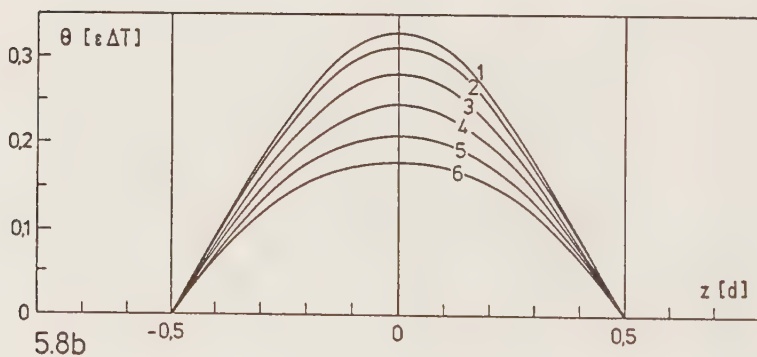
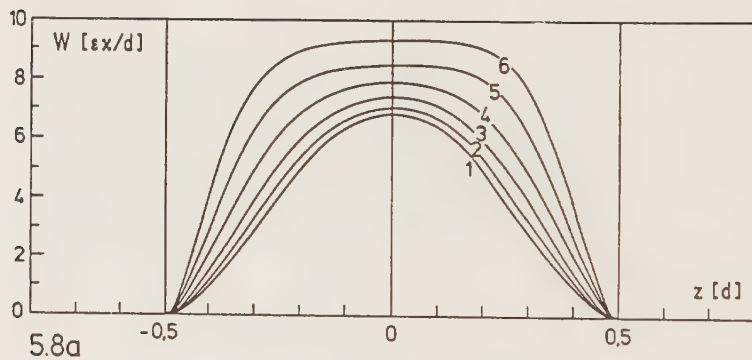


5.6b



5.6c





5.5 Amplitude und Form der Konvektion

Die lineare Stabilitätsanalyse bestimmt die Bedingungen, unter denen eine infinitesimale Störung des Anfangszustandes weiter anwachsen kann. Jenseits dieser Grenzen wächst die Konvektionsamplitude innerhalb der linearen Theorie exponentiell an. Tatsächlich strebt die Amplitude aber gegen einen endlichen Wert, denn durch den konvektiven Transport von Wärme und Impuls ändert die Strömung sowohl ihre eigene Form als auch die Verteilung der Auftriebskräfte. Dieser Rückkoppelungsmechanismus wird formal von den nichtlinearen Termen in Gleichungssystem (5.17) erfaßt. In Ferrofluiden kommt dabei zu dem bekannten nichtlinearen Term in (5.17b), der die durch Konvektion veränderte Temperaturverteilung enthält, ein weiterer nichtlinearer Beitrag in (5.17a), für den die Änderung des lokalen Feldes durch Konvektion mit endlicher Amplitude verantwortlich ist. Der Einfluß infinitesimaler Störungen auf das lokale Feld wurde bereits behandelt. Mit der Einbeziehung der nichtlinearen Terme in die Analyse erhält man nicht nur die Amplitude der Konvektion, sondern auch weitere Einschränkungen der Lösungsmannigfaltigkeit der linearisierten Gleichungen.

Für kleine aber endliche Konvektionsamplituden kann das nichtlineare Problem störungstheoretisch behandelt werden. Das Verfahren, das von Malkus & Veronis (1958) initiiert und von Schlüter et al. (1965) und Busse (1967) weiterentwickelt wurde, besteht in der Zerlegung des nichtlinearen Gleichungssystems in eine Folge von linearen Gleichungssystemen, die sukzessive gelöst werden können. Zu diesem Zweck wird das Geschwindigkeitspotential Ψ , das Temperaturfeld Θ und das magnetische Potential Φ in Form einer Potenzreihenentwicklung in ε dargestellt:

$$\begin{aligned}\Psi &= \varepsilon \Psi^{(1)} + \varepsilon^2 \Psi^{(2)} + \dots, \\ \Theta &= \varepsilon \Theta^{(1)} + \varepsilon^2 \Theta^{(2)} + \dots, \\ \Phi &= \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots.\end{aligned}\tag{5.35}$$

Mit der Potenzreihendarstellung (5.35) für die Felder Ψ , Θ und Φ erhält man eine Relation zwischen der Amplitude ε und der archimedischen Rayleigh-Zahl Ra der Gestalt

$$Ra = Ra^{(0)} + \varepsilon Ra^{(1)} + \varepsilon^2 Ra^{(2)} + \dots,\tag{5.36}$$

wobei sich die Zahlen $Ra^{(1)}$ als Integrale der Funktionen $\Psi^{(1)}$, $\Theta^{(1)}$ und $\Phi^{(1)}$ ergeben. Die Koeffizienten $Ra^{(1)}$ bestimmen die Art der Bifurkation. Konvektion setzt bei $Ra=Ra^{(0)}$ ein. Wenn $Ra^{(1)}$ verschwindet, ist die Bifurkation symmetrisch und wenn $Ra^{(2)}$ positiv ist, dann ist die Bifurkation superkritisch (vgl. Diagramm 2.2). Die Lösungen erster Ordnung und die kritische Rayleigh-Zahl wurden in den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels berechnet. Der Geschlossenheit halber werden wir hier den gesamten Lösungsweg für freie Randbedingungen mit $J=0$ und $I=1$ skizzieren, d.h. für

$$\Psi = \partial_z^2 \Psi = \Theta = \partial_z \Phi = 0, \quad \text{bei } z = \pm 1/2. \quad (5.37)$$

Für feste Randbedingungen oder $J>0$ ist die Vorgehensweise analog, aber die Gleichungen können nur numerisch gelöst werden.

Das Gleichungssystem erster Ordnung ist identisch mit dem Linearteil von (5.17):

$$\Delta^2 \Delta_2 \Psi^{(1)} - (Ra^{(0)} + Rm) \Delta_2 \Theta^{(1)} + Rm \Delta_2 \partial_z \Phi^{(1)} = 0, \quad (5.38a)$$

$$\Delta_2 \Psi^{(1)} - \Delta \Theta^{(1)} = 0, \quad (5.38b)$$

$$\partial_z \Theta^{(1)} - \Delta \Phi^{(1)} = 0. \quad (5.38c)$$

Wie in Abschnitt 5.3 wählen wir die Ansätze

$$\Psi^{(1)} = \frac{\sqrt{2(a^2 + \pi^2)}}{a^2} \cos(\pi z) \sum_{m=-N}^N c_m \exp(i a^{(m)} x), \quad (5.39a)$$

$$\Theta^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + \pi^2}} \cos(\pi z) \sum_{m=-N}^N c_m \exp(i a^{(m)} x), \quad (5.39b)$$

$$\Phi^{(1)} = \frac{\pi \sqrt{2}}{(a^2 + \pi^2)^{3/2}} \sin(\pi z) \sum_{m=-N}^N c_m \exp(i a^{(m)} x), \quad (5.39c)$$

die entsprechend (5.32) normiert sind und sowohl die Randbedingungen (5.37) als auch das Gleichungssystem (5.38) erfüllen, falls die Bedingung

$$Ra^{(0)} = \frac{(a^2 + \pi^2)^3}{a^2} - Rm + Rm \frac{\pi^2}{a^2 + \pi^2} \quad (5.40)$$

befriedigt wird. Im Gegensatz zu (5.26) lassen wir hier bis auf die Einschränkungen

$$c_{-m} = c_m^*, \quad a^{(m)} = -a^{(-m)} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^N |c_m|^2 = 1, \quad (5.41)$$

die gewährleisten, daß die Lösungen reell sind und daß die Normierungsbedingung (5.32) nicht verletzt wird, beliebige Überlagerungen von Wellenvektoren zu. Die Lösbarkeitsbedingung erster Ordnung (5.40) ist, wie schon bemerkt wurde, unabhängig von der Zahl N und der relativen Orientierung der Wellenvektoren $a^{(m)}$.

In der Ordnung ε^2 lauten die Gleichungen (5.17)

$$\Delta^2 \Delta_2 \Psi^{(2)} - (Ra^{(0)} + Rm) \Delta_2 \Theta^{(2)} + Rm \Delta_2 \partial_z \Phi^{(2)} = Ra^{(1)} \Delta_2 \Theta^{(1)} \quad (5.42a)$$

$$\Delta \Theta^{(2)} - \Delta_2 \Psi^{(2)} = (\nabla \partial_z \Psi^{(1)}) \cdot (\nabla \Theta^{(1)}) - (\Delta \Psi^{(1)}) (\partial_z \Theta^{(1)}), \quad (5.42b)$$

$$\Delta \Phi^{(2)} - \partial_z \Theta^{(2)} = 0. \quad (5.42c)$$

Der nichtlineare Θ - Φ -Term in (5.17a) verschwindet für die Lösungen erster Ordnung. Das Gleichungssystem (5.42) besitzt genau dann eine Lösung, wenn sein inhomogener Teil (die rechte Seite) orthogonal zu jeder Lösung des adjungierten homogenen Problems ist (dritter Fredholm'scher Satz; vgl. z.B. Schmeidler 1954).

Den zum linearen Operator L des Gleichungssystems (5.38) adjungierten Operator L^+ und die entsprechenden Randbedingungen erhält man aus der Forderung

$$\langle \xi | L^+ \xi^+ \rangle = \langle \xi^+ | L \xi \rangle, \quad (5.43)$$

die für alle Vektoren ξ des betrachteten Funktionenraums erfüllt sein muß, zu

$$\Delta^2 \Delta_2 \Psi^{(1)+} - \Delta_2 \Theta^{(1)+} = 0, \quad (5.44a)$$

$$- (Ra^{(0)} + Rm) \Delta_2 \Psi^{(1)+} + \Delta \Theta^{(1)+} + \partial_z \Phi^{(1)+} = 0, \quad (5.44b)$$

$$- Rm \Delta_2 \Psi^{(1)+} + \Delta \Phi^{(1)+} = 0. \quad (5.44c)$$

Die adjungierten Randbedingungen sind mit den ursprünglichen (5.37) iden-

tisch. Als Lösungen des adjungierten homogenen Problems erhalten wir

$$\Psi^{(1)+} = \frac{1}{a(a^2 + \pi^2)} \cos(\pi z) \sum_{m=-N}^N c_m \exp(-i a^{(m)} \cdot x), \quad (5.45a)$$

$$\Theta^{(1)+} = \frac{a^2 + \pi^2}{a} \cos(\pi z) \sum_{m=-N}^N c_m \exp(-i a^{(m)} \cdot x), \quad (5.45b)$$

$$\Phi^{(1)+} = -\frac{a \pi R m}{(a^2 + \pi^2)^2} \sin(\pi z) \sum_{m=-N}^N c_m \exp(-i a^{(m)} \cdot x). \quad (5.45c)$$

Damit läßt sich nun die Lösbarkeitsbedingung für das Gleichungssystem zweiter Ordnung formulieren. Bis auf den $Ra^{(1)}$ -Term sind alle Summanden auf der rechten Seite von (5.42) antisymmetrisch zur Schichtmitte und deshalb orthogonal zu der Lösung des adjungierten homogenen Problems (5.45). Die Lösbarkeitsbedingung wird also befriedigt, wenn

$$Ra^{(1)} = 0 \quad (5.46)$$

gilt, das heißt, die Bifurkation in den konvektiven Zustand ist symmetrisch.

Die Lösungen in der Ordnung ε^2 lauten dann:

$$\Psi^{(2)} = \sin(2\pi z) \sum_{m,n=-N}^N \rho_{mn} c_m c_n \exp(-i(a^{(m)} + a^{(n)}) \cdot x), \quad (5.47a)$$

$$\Theta^{(2)} = \sin(2\pi z) \sum_{m,n=-N}^N \sigma_{mn} c_m c_n \exp(-i(a^{(m)} + a^{(n)}) \cdot x), \quad (5.47b)$$

$$\Phi^{(2)} = -\cos(2\pi z) \sum_{m,n=-N}^N \tau_{mn} c_m c_n \exp(-i(a^{(m)} + a^{(n)}) \cdot x), \quad (5.47c)$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} &= \frac{\pi \eta_2 \eta_3}{2a^2(\eta_1 \eta_3 Ra^{(0)} + \eta_1^2 Rm - \eta_3^4)} \cdot \\ \rho_{mn} &= \frac{\eta_3 Ra^{(0)} + \eta_1 Rm}{\eta_3^3} \sigma_{mn}, \\ \tau_{mn} &= \frac{2\pi}{\eta_3^3} \sigma_{mn} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 2a^{(m)} \cdot a^{(n)} + 2a^2, \\ \eta_2 &= 2a^{(m)} \cdot a^{(n)} - 2a^2, \\ \eta_3 &= 2a^{(m)} \cdot a^{(n)} + 2a^2 + 4\pi^2 \end{aligned}$$

verwendet wurden.

Die Gleichungen dritter Ordnung

$$\Delta^2 \Delta_2 \Psi^{(3)} - (Ra^{(0)} + Rm) \Delta_2 \Theta^{(3)} + Rm \Delta_2 \partial_z \Phi^{(3)} = Ra^{(2)} \Delta_2 \Theta^{(1)} + \quad (5.48a)$$

$$Rm \delta \cdot (\Theta^{(1)} \nabla \partial_z \Phi^{(2)} + \Theta^{(2)} \nabla \partial_z \Phi^{(1)}),$$

$$\Delta \Theta^{(3)} - \Delta_2 \Psi^{(3)} = (\nabla \Theta^{(1)}) \cdot (\delta \Psi^{(2)}) + (\nabla \Theta^{(2)}) \cdot (\delta \Psi^{(1)}), \quad (5.48b)$$

$$\Delta_2 \Phi^{(3)} - \partial_z \Theta^{(3)} = 0, \quad (5.48c)$$

brauchen nicht explizit gelöst zu werden, da schon die Lösbarkeitsbedingung den Entwicklungskoeffizienten $Ra^{(2)}$ für die verschiedenen in Frage kommenden Konvektionsformen liefert. Nach Multiplikation des inhomogenen Teils von (5.48) mit der Lösung des homogenen adjungierten Gleichungssystems und Integration über die Flüssigkeitsschicht folgt

$$Ra^{(2)} = \frac{\pi}{2c} \sum_{l,m,n=-N}^N \left\{ Rm \left(\frac{4\pi^2}{\eta_3} - \frac{\pi^2}{a^2 + \pi^2} \right) + \frac{(a^2 + \pi^2)^3}{a^2} \right\} \sigma_{mn} \cdot \quad (5.49)$$

$$(a^{(1)} (a^{(m)} + a^{(n)} + 2a^2) c_l c_m c_n \delta(a^{(1)} + a^{(m)} + a^{(n)} - a^{(k)}))$$

für alle k zwischen $-N$ und $+N$. Aus Symmetriegründen wird (5.49) erfüllt, wenn

$$|c_k| = 1/N, \quad \text{für } -N \leq k \leq N$$

gilt, und wenn die Winkel zwischen je zwei benachbarten Wellenvektoren gleich sind. Damit erhalten wir für Konvektionsrollen ($N=1$), Quadrate ($N=2$) oder Sechsecke ($N=3$) die Werte

$$Ra_{\text{Rollen}}^{(2)} = \frac{(a_c^2 + \pi^2)^3}{\pi^2}, \quad (5.50a)$$

$$Ra_{\text{Quadrate}}^{(2)} = \frac{(a_c^2 + \pi^2)^3}{\pi^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{\pi^4 (3a_c^2 + \pi^2) (2a_c^2 + 4\pi^2)^2}{a_c^2 (2a_c^2 + 4\pi^2)^4 + 4a_c^2 (a_c^2 + \pi^2)^3 (a_c^2 - 3\pi^2)} \right\}, \quad (5.50b)$$

$$Ra_{\text{Sechsecke}}^{(2)} = \frac{(a_c^2 + \pi^2)^3}{\pi^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{3\pi^2}{4a_c^2} \frac{(a_c^2 + 4\pi^2)^2 (7a_c^2 + \pi^2)}{(a_c^2 + 4\pi^2)^4 + (a_c^2 + \pi^2)^3 (5a_c^2 - 7\pi^2)} + \right. \quad (5.50c)$$

$$\left. \frac{\pi^4}{12a_c^2} \frac{(3a_c^2 + 4\pi^2)^2 (5a_c^2 + 3\pi^2)}{(3a_c^2 + 4\pi^2)^4 - 3(a_c^2 + \pi^2)^3 (a_c^2 - 5\pi^2)} \right\}.$$

nachdem die Wellenzahl a durch ihren kritischen Wert a_c (Glg. (5.28)) ersetzt wurde. Bei verschwindendem magnetischen Auftrieb ($a_c = \pi/\sqrt{2}$) geht (5.50) in die bekannten Lösungen für die Bénard-Konvektion über (Malkus & Veronis 1958):

$$Ra_{\text{Rollen}}^{(2)} = 0,50 Ra^{(0)} (Rm=0),$$

$$Ra_{\text{Quadrat}}^{(2)} = 0,61 Ra^{(0)} (Rm=0),$$

$$Ra_{\text{Sechsecke}}^{(2)} = 0,69 Ra^{(0)} (Rm=0).$$

Da $Ra^{(2)}$, wie Diagramm 5.9 zeigt, für alle Rm und alle Konvektionsformen positiv ist, folgt, daß die Bifurkation auch unter Beteiligung magnetischer Kräfte superkritisch ist. Den kleinsten Wert nimmt $Ra^{(2)}$ jeweils für Konvektionsrollen an. Nach Busse (1967b) bilden somit Konvektionsrollen die stabile Konvektionsform, weil sie die Wärme am effektivsten transportieren (vgl. Kapitel 2.2). Mit (5.34) und (5.36) gilt nämlich

$$\left(\frac{\partial Nu}{\partial Ra} \right)_{Rm} = \frac{1}{Ra^{(2)}}. \quad (5.51)$$

was bedeutet, daß der Wärmestrom für die Konvektionsform mit minimalem $Ra^{(2)}$ am stärksten ansteigt.

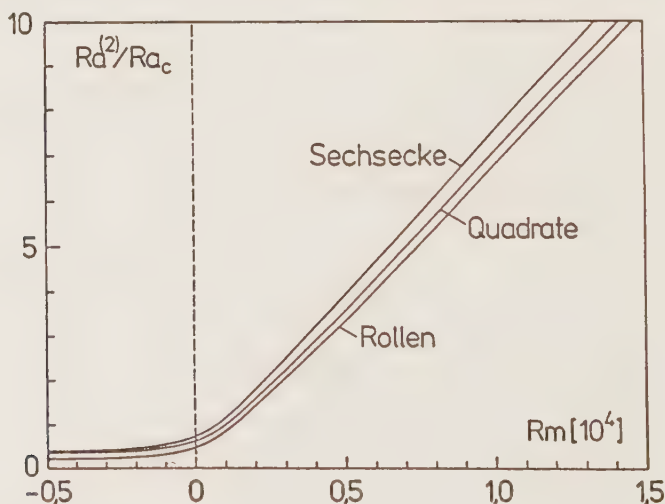


Diagramm 5.9 $Ra^{(2)}$ als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl für Konvektionsrollen, quadratische und sechseckige Konvektionszellen.

Als weiteres typisches Merkmal fällt in Diagramm 5.9 auf, daß der Koeffizient $Ra^{(2)}$ für große magnetische Rayleigh-Zahlen linear mit Rm anwächst. Das ist der Bereich, in dem der archimedische Auftrieb stabilisierend wirkt. Anhand der vorangegangenen Ableitung ist diese Eigenschaft nicht mehr unmittelbar einleuchtend. Wir werden deshalb einen zweiten Weg zur Berechnung des konvektiven Wärmetransportes einschlagen, der erstens einen direkteren Zugang bietet und zweitens auch für realistische Randbedingungen ohne zusätzlichen numerischen Aufwand begehbar ist. Allerdings gilt die einfachere Methode nur näherungsweise und unterscheidet nicht zwischen verschiedenen Konvektionsformen. Deshalb werden wir in einem weiteren Schritt den Fehler des Näherungsverfahrens für die verschiedenen Konvektionsformen abschätzen, woraus sich ein Kriterium für die realisierte Konvektionsform ergibt.

Es ist eine Erfahrungstatsache, daß das Strömungsmuster an der Instabilitätsschwelle bei Bifurkationen, die in einen stationären Zustand münden, auch unter superkritischen Bedingungen zunächst erhalten bleibt. Dies gilt z.B. für die Rayleigh-Bénard-Konvektion und die Taylor-Rotation und ist einer der Gründe, weshalb sich solche Instabilitäten gut für Experimente eignen, denn z.B. die kritische Wellenzahl kann nur bei endlicher Amplitude gemessen werden. Umgekehrt legt nun diese Eigenschaft aber nahe, auch die Berechnung der Amplitude dadurch zu vereinfachen, daß die Form der Konvektionsströmung als von der Amplitude unabhängig betrachtet wird (Stuart 1958). Für später sei erwähnt, daß "Stuart's shape assumption" äquivalent zur Annahme ist, daß die Lösungen zweiter Ordnung nicht von x und y abhängen. Aufgrund der Massenerhaltung und der Randbedingungen, die z.B. einen homogenen Aufwärts- oder Abwärtsstrom der Flüssigkeit nicht zulassen, folgt aus der Annahme horizontaler Konstanz von $W^{(2)}$ unmittelbar

$$W^{(2)} = 0,$$

d.h., die Geschwindigkeit W ist bis zur zweiten Ordnung proportional zu $W^{(1)}$. Der Wärmestrom und der magnetische Fluß unterliegen dieser Einschränkung selbstverständlich nicht, weil die Ränder für beide durchlässig sind.

Nach Einsetzen der Reihenentwicklung (5.35) in (5.17b) folgt für $\Theta^{(2)}$

$$\partial_z \Theta^{(2)} = \overline{(W^{(1)} \Theta^{(1)})} - \langle W^{(1)} \Theta^{(1)} \rangle, \quad (5.52)$$

wobei der obere Querstrich für die Mittelung über die horizontale Ebene steht. Die Gleichung besagt, daß die Änderung der Temperatur in zweiter Ordnung von der vertikalen Strömung $W^{(1)}$ im Temperaturfeld $\Theta^{(1)}$ verursacht wird, analog zu $\Theta^{(1)}$, das sich aus der vertikalen Strömung im ungestörten Temperaturfeld $T = \beta z$ ergab. Ein Grund, der das exponentielle Anwachsen der Konvektionsamplitude verhindert, ist in der Verkleinerung des mittleren Temperaturgradienten in der Schichtmitte durch $\Theta^{(2)}$ zu suchen (Diagramm 5.10). Da die Potentialgleichung (5.17c) als Maxwell-Gleichung generell linear ist, ergibt sich das magnetische Potential $\Phi^{(2)}$ direkt aus dem Temperaturfeld $\Theta^{(2)}$:

$$\partial_z \partial_z \Phi^{(2)} = \partial_z \Theta^{(2)} \quad (5.53)$$

Feldgradient und Temperaturgradient sind in zweiter Ordnung identisch. Mit (5.53) und (5.52) wurden die Lösungen zweiter Ordnung auf die Lösungen erster Ordnung zurückgeführt. Für die weitere Rechnung genügt die Kenntnis der z -Ableitungen von $\Theta^{(2)}$ bzw. $\Phi^{(2)}$ mit denen man schließlich aus der noch verbleibenden Geschwindigkeitsgleichung (5.17a), nach Multiplikation mit $W^{(1)}$ und Mittelung über die Flüssigkeitsschicht, die gesuchten Relationen für die Entwicklungskoeffizienten der archimedischen Rayleigh-Zahl erhält:

$$Ra^{(0)} = \langle W^{(1)} \Delta^2 W^{(1)} \rangle - Rm + Rm \langle W^{(1)} \partial_z \Phi^{(1)} \rangle, \quad (5.54a)$$

$$Ra^{(1)} = 0, \quad (5.54b)$$

$$Ra^{(2)} = Ra^{(0)}(Rm=0) (\langle (W^{(1)} \Theta^{(1)})^2 \rangle - 1) + \\ Rm (\langle (W^{(1)} \Theta^{(1)})^2 \rangle - 1) - \\ Rm (\langle W^{(1)} \Theta^{(1)} W^{(1)} \partial_z \Phi^{(1)} \rangle - \langle W^{(1)} \partial_z \Phi^{(1)} \rangle). \quad (5.54c)$$

Bis jetzt wurden die Randbedingungen außer der trivialen Forderung, daß die Ränder für die Flüssigkeit undurchlässig sind, nicht verwendet. Gleichung (5.54) gilt deshalb sowohl für idealisierte als auch für realistische Randbedingungen. Die relativ kleinen Abweichungen zwischen den verschiedenen Konvektionsformen tauchen hier als Folge der Mittelwertbildung nicht mehr auf. Die Gleichungen (5.54) zeigen stattdessen, wie sich die Profile der Lösungen in z -Richtung auf die Bifurkation auswirken.

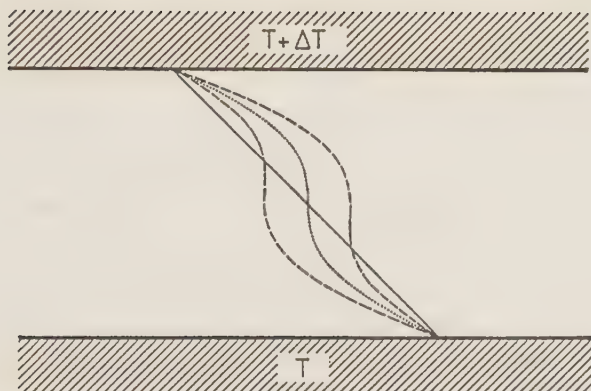


Diagramm 5.10 Vertikale Temperaturverteilung in einer Flüssigkeitsschicht ohne Konvektion (durchgezogene Linie) bzw. mit Konvektion (unterbrochene Kurven). Die gepunktete Linie beschreibt den Verlauf der in horizontaler Richtung gemittelten Temperatur. Das darunter bzw. darüber liegende Profil zeigt die beiden Extrema im Bereich abwärts bzw. aufwärts strömender Flüssigkeit.

Die Symmetrie der Lösungen bezüglich der Schichtmitte (siehe Diagramme 5.7 und 5.8) ist für das Verschwinden von $Ra^{(1)}$ verantwortlich. Der neutrale Wert $Ra^{(0)}$, der den Schwellenwert von Ra für Konvektion beschreibt, setzt sich wie die analytischen Ausdrücke (5.23) oder (5.27) aus drei Beiträgen zusammen. Der erste enthält die Energiedissipation durch viskose Reibung. Bei verschwindendem magnetischem Auftrieb ($Rm=0$) muß die durch archimedische Auftriebskräfte freigesetzte potentielle Energie größer als der erste Term in (5.54a) sein, der deshalb auch mit $Ra^{(0)}(Rm=0)$ abgekürzt wird. Da der magnetische Auftrieb die thermische Konvektion unterstützt, wird der Schwellenwert $Ra^{(0)}$ im Magnetfeld verkleinert, was durch den zweiten Term auf der rechten Seite von (5.54a) ausgedrückt wird. Als Folge des entmagnetisierenden Feldes $\partial_z \Phi$ hat der magnetische Auftrieb aber auch eine stabilisierende Komponente (letzter Term). Daß die Feldstörungen $\partial_z \Phi$ im Mittel das gleiche Vorzeichen wie die Strömungsgeschwindigkeit W besitzt, wurde in Abschnitt 5.2 gezeigt.

Der Entwicklungskoeffizient $Ra^{(2)}$ hat im allgemeinen einen endlichen und positiven Wert. Dies bedeutet, daß die Amplitude ε der Konvektion an

der Instabilitätsschwelle stetig und monoton mit der Rayleigh-Zahl anwächst. Die Begrenzung der Amplitude bei fester superkritischer Rayleigh-Zahl Ra rührt zum einen daher, daß der innere Temperaturgradient durch den konvektiven Wärmetransport kleiner wird, was sich im ersten Term auf der rechten Seite von (5.54c) niederschlägt. Parallel mit der Abflachung des Temperaturgradienten wird nach (5.53) auch der Gradient des inneren Feldes kleiner, der die Ursache für den magnetischen Auftrieb bildet. Sein Einfluß ist deshalb proportional zum magnetischen Auftrieb, dessen dimensionsloser Wert durch die magnetische Rayleigh-Zahl gegeben ist. Der letzte Term enthält die Modifikationen, die vom Störfeld erster Ordnung $\partial_z \Phi^{(1)}$ verursacht werden. Im Grenzfall sehr großer magnetischer Rayleigh-Zahlen wird dieser Beitrag klein, denn das entmagnetisierende Feld $\partial_z \Phi^{(1)}$ strebt durch Anpassung der Wellenzahl gegen Null.

Wir kommen damit zu dem Ergebnis, daß die magnetischen Kräfte zwar den Schwellenwert $Ra^{(0)}$ für das Einsetzen der Konvektion proportional zu Rm nach unten verschieben (5.54a), aber gleichzeitig auch den Anstieg des Wärmestroms umgekehrt proportional zu Rm verkleinern (5.54c). Für kleine Konvektionsamplituden, insbesondere für $\epsilon=0$, ist der Einfluß magnetischer Kräfte am größten (vgl. Diagramm 5.12).

In Diagramm 5.11 ist der mit den Lösungen für feste Randbedingungen nach (5.54c) berechnete Verlauf von $Ra^{(2)}$ als Funktion von Rm für verschiedene magnetische Randbedingungen J aufgetragen. Für freie Randbedingungen und $J = 0$ erhält man nach (5.54c) den exakten Wert für Konvektionsrollen (5.50a), der in Diagramm 5.10 dargestellt ist. Daß die Näherungsmethode in diesem Fall den exakten Wert reproduziert, ist nicht überraschend, denn für freie Randbedingungen erfüllen Konvektionsrollen die zu (5.54) gemachten Annahmen vollständig. Aber auch für feste Randbedingungen und Konvektionsrollen weicht $Ra^{(2)}$ bei $Rm=0$ vom exakten Wert nur um etwa 1% ab (Schlüter et al. 1965). Für realistische magnetische Randbedingungen $J>0$ sind die Annahmen für die Näherungslösung nicht vergleichbar gut erfüllt, denn der endliche Wert des Magnetfeldes im Randbereich ist auch in zweiter Ordnung von der horizontalen Position abhängig. Es ist daher zu vermuten, daß die Verkleinerung von $Ra^{(2)}$ mit zunehmendem J im wesentlichen durch inkorrekte Mittelwertbildung verursacht wird, wobei auch die Form der Konvektion eingeht.

Mit Stuart's Formenannahme werden die abschwächenden Einflüsse auf die Konvektionsströmung unterschätzt, weil die Mittelwertbildung in horizontaler Richtung vor dem Berechnen der quadratischen Terme erfolgt

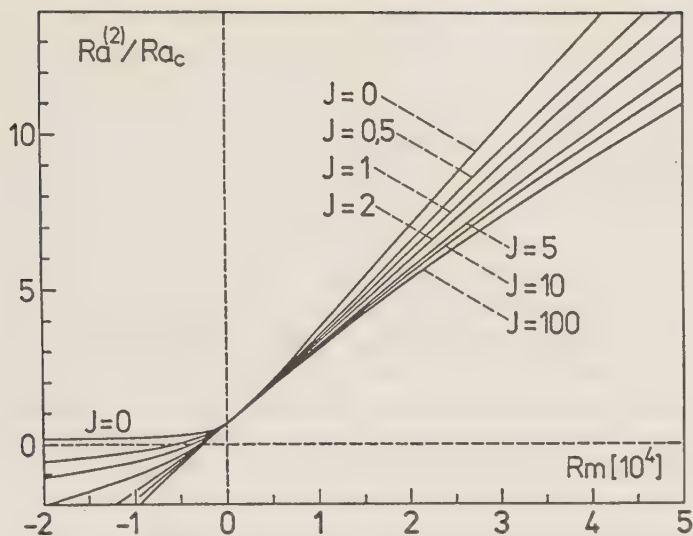


Diagramm 5.11 $Ra^{(2)}$ als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl für verschiedene Werte des äußeren Permeabilitätsverhältnisses J .

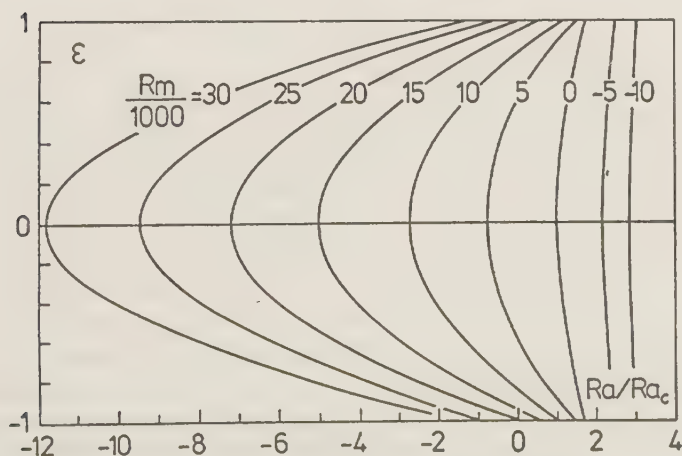


Diagramm 5.12 Bifurkationsdiagramme $\epsilon(Ra)$ für verschiedene magnetische Rayleigh-Zahlen. Mit zunehmendem Rm verschiebt sich die kritische Rayleigh-Zahl Ra_c nach unten, aber der Anstieg der Amplitude wird entsprechend kleiner.

(Schwarzsche Ungleichung). Sofern die quadratischen Terme konstant bzgl. x und y sind, ist die Berechnung exakt. Es kommt also darauf an, für die verschiedenen Konvektionsformen die Abweichung zwischen dem Mittelwert des Quadrats der die Konvektion begrenzenden Terme vom Quadrat ihres Mittelwertes zu bestimmen. Anstelle einer exakten Berechnung wollen wir fragen, welche der in Frage kommenden Konvektionsformen am schwächsten betroffen ist, das heißt, für welche die fluktuierenden Beiträge, die bei (5.54) unterschlagen wurden, minimal sind. Diese Abschätzung ist im Randbereich besonders einfach, da die Bewegungsgleichungen dort linear sind, weil die Geschwindigkeit gegen Null geht. Zur Abschätzung genügt es deshalb, den quadratischen Beitrag einer fluktuierenden Komponente, deren Mittelwert verschwindet, für die verschiedenen Überlagerungen von Wellenvektoren zu berechnen. Wenn wir je 6 Wellenvektoren mit den Amplituden $c_m = 1/6$ zu Rollen, Quadraten oder Sechsecken anordnen, folgt:

$$\left\langle \left(\sum_{m=-1}^1 \exp(i\mathbf{a}^{(m)} \cdot \mathbf{x}) \right)^2 \right\rangle = 1 \quad \text{für Rollen,}$$

$$\left\langle \left(\sum_{m=-2}^2 1/2 \exp(i\mathbf{a}^{(m)} \cdot \mathbf{x}) \right)^2 \right\rangle = 1/2 \quad \text{für Quadrate und}$$

$$\left\langle \left(\sum_{m=-3}^3 1/3 \exp(i\mathbf{a}^{(m)} \cdot \mathbf{x}) \right)^2 \right\rangle = 1/3 \quad \text{für Sechsecke.}$$

Der die Amplitude begrenzende Einfluß der Feldverteilung in der Randschicht ist also für Konvektionsrollen am größten, gefolgt von quadratischen und sechseckigen Zellen. Die nichtlinearen Beiträge der Randschicht favorisieren die Konvektionsformen in der umgekehrten Reihenfolge wie die nichtlinearen Beiträge im Inneren der Flüssigkeitsschicht (vgl. Diagramm 5.9). In beiden Fällen liegt der Wärmetransport von Quadraten zwischen dem von Rollen und Sechsecken, aber jeweils näher an der bevorzugten Konvektionsform. Wenn also beide Einflüsse wirksam und wie für $J=1/2$ auch vergleichbar groß sind, besitzt Konvektion in Form quadratischer Zellen den größten Wärmetransport, denn für sie ist die Summe der nichtlinearen Beiträge minimal. Gemäß dem Stabilitätskriterium von Kapitel 2.2 wird deshalb mit zunehmendem magnetischem Auftrieb ein Übergang von stabilen Konvektionsrollen zu stabilen quadratischen Zellen erwartet. Für welche magnetische Rayleigh-Zahl der Übergang stattfindet und ob es für große Werte von J einen Übergang zu sechseckigen Zellen gibt, kann mit der einfachen Überlegung nicht beantwortet werden.

6. Messungen

Beim Einsetzen der Konvektion steigt die scheinbare Wärmeleitfähigkeit als Folge des konvektiven Wärmetransportes rasch an. Mit der Messung des auch technisch wichtigen Wärmetransportes durch die Flüssigkeitsschicht läßt sich deshalb der Konvektionsbeginn relativ einfach und ohne störende Eingriffe in das System festlegen.

Ein direktes und störungsfreies Verfahren, um Konvektion sichtbar zu machen, bildet die Schlierenmethode, die die Temperaturabhängigkeit der optischen Dichte einer Flüssigkeit zur Abbildung des Strömungsmusters ausnutzt. Auf Ferrofluidschichten von mehr als 1 mm Dicke kann diese Methode jedoch nicht angewandt werden, weil die Eindringtiefe von Licht nur etwa $1\text{ }\mu\text{m}$ beträgt. Da gerade im Hinblick auf die begrenzte Lebensdauer von Ferrofluiden die direkte optische Beobachtung des Strömungszustandes unverzichtbar ist, wurde ein abgewandeltes Verfahren der Schlierenmethode entwickelt, das darüberhinaus die gleichzeitige Bestimmung des Wärmestromes ermöglichte.

Das verwendete Ferrofluid wurde vor den Messungen für mindestens zwei Monate bei Raumtemperatur erschütterungsfrei und unter Luftabschluß gelagert, um Oxidation des Magnetits zu verhindern. Dabei sinken schwere Konglomerate und große Teilchen auf den Behälterboden ab, und der Rest läßt sich durch vorsichtiges Abgießen von den Verunreinigungen trennen. Lagerung im gefrorenen Zustand oder Aufbrechen der Konglomerate durch Ultraschall erwiesen sich nicht als vorteilhaft, denn in beiden Fällen verbleiben die Kondensationskeime in der Suspension, mit der Folge raschen Alterns des Ferrofluids.

6.1 Meßmethoden

Die ersten Wärmestrommessungen wurden an Ferrofluidschichten in einem zylindrischen Behälter von 100 mm Durchmesser durchgeführt. Der Zylindermantel bestand aus einem Plexiglasring mit der Wandstärke 2 mm, und die Boden- bzw. Deckplatte bildeten zwei 20 mm dicke Aluminiumscheiben (siehe Bild 6.1). Die Grenzflächen zum Ferrofluid besaßen eine Ebenheit mit $1/100\text{ mm}$ Toleranz und die Abstandsschwankungen waren kleiner als $2/100\text{ mm}$. Über eine 1 mm dünne Plexiglasplatte befanden sich die

Aluminiumscheiben in thermischem Kontakt mit jeweils einem Kupferblock, der von thermostatgeregeltem Wasser durchströmt wurde. Da die Wärmeleitfähigkeit von Aluminium und Kupfer um mehr als drei Größenordnungen besser als die des Ferrofluids bzw. des Plexiglasses ist, sind die Temperaturdifferenzen homogen über die Schicht. Sie wurden mit in Eiswasser kalibrierten Platinwiderständen auf $1/100$ K genau gemessen. Um den linearen Temperaturgang durch thermische Ausdehnung und andere temperaturabhängige Eigenschaften zu eliminieren, wurde die mittlere Temperatur konstant gehalten (zur Temperaturregelung, siehe Abschnitt 6.3). Der Wärmestrom durch die Flüssigkeit ist damit proportional zum Mittelwert der Temperaturdifferenzen $T_1 - T_2$ und $T_3 - T_4$ (siehe Bild 6.1). Die Proportionalitätskonstante wurde an einem zähen Silikonöl (Wacker Silikonöl AK 750) mit bekannter Wärmeleitfähigkeit ermittelt, das sich im gesamten Temperaturintervall im subkritischen Zustand befand, also keinen konvektiven Beitrag zum Wärmetransport besaß. Aufgrund der ähnlichen Wärmeübergangswiderstände der Plexiglasplatten und der Flüssigkeitsschicht sind die relativen Fehler der Temperaturdifferenz $\Delta T = (T_2 - T_3)$ und des Wärmestroms ungefähr gleich groß.

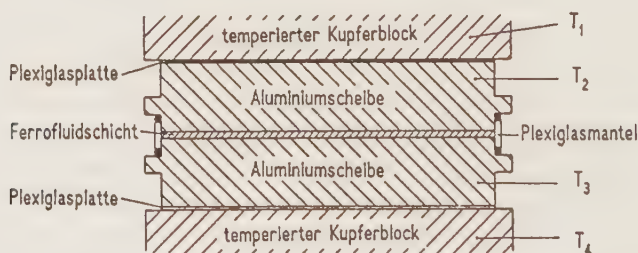


Bild 6.1 Schnitt durch die Konvektionskammer, die für globale Wärmestrommessungen verwendet wurde.

Das Meßergebnis an einer 3 mm dicken Ferrofluidschicht mit einer mittleren Temperatur von 25°C ist in Diagramm 6.2 dargestellt. Für verschiedene vertikale magnetische Feldstärken wurde die Temperaturdifferenz in kleinen Schritten nach oben bzw. nach unten vergrößert und jeweils der Wärmestrom gemessen (zur Felderzeugung, siehe Abschnitt 6.2). Die Diagonale repräsentiert den Beitrag der Wärmeleitung, und Abweichungen zu größeren Beträgen kommen durch Konvektion zustande.

Wenn die Flüssigkeitsschicht von unten beheizt wird, setzt Konvektion im Feld $H = 0$ ungefähr bei $\Delta T_c = -18 \text{ K}$ ein. Für endliche Feldstärken wird die Einsatzschwelle erwartungsgemäß zu kleineren Temperaturdifferenzen verschoben und Konvektion wird auch für positive Temperaturgradienten (von oben beheizte Kammer) möglich. Trotz der großen Genauigkeit der Wärmestrommessung ist es jedoch nicht möglich, den Konvektionsbeginn eindeutig zu lokalisieren. Der erwartete abrupte Anstieg des Wärmestroms bei ΔT_c wird von einem subkritischen konvektiven Beitrag überlagert, der von den Feldinhomogenitäten an den lateralen Begrenzungen verursacht wird und dessen Amplitude proportional zur Temperaturdifferenz ΔT anwächst. Mit gut wärmeleitenden Begrenzungsplatten mißt man den globalen Wärmestrom durch die Flüssigkeit und die beiden konvektiven Beiträge lassen sich nicht getrennt beobachten.

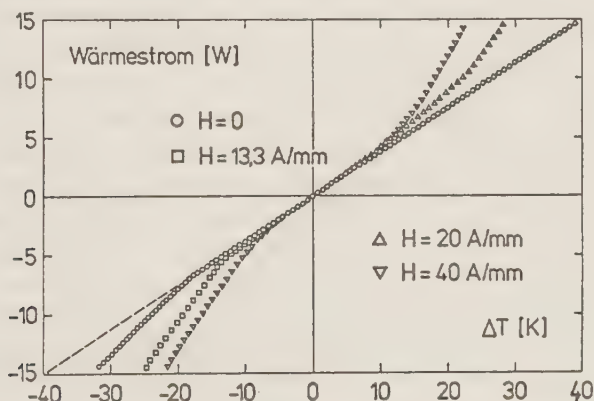


Diagramm 6.2 Wärmestrom durch eine 3 mm dicke Ferrofluidschicht als Funktion der Temperaturdifferenz für verschiedene Feldstärken H . $\Delta T < 0$ bedeutet, daß die Schicht von unten beheizt wird.

Den entgegengesetzten Extremfall zu metallischen Begrenzungsplatten erhält man mit einem Begrenzungsmedium, dessen Wärmeleitfähigkeit sehr viel kleiner als die des Ferrofluids ist. Allerdings wird dann der Wärmetransport sehr klein, was bei gleicher Auflösung wie oben zu großen relativen Fehlern führt. Wenn die Ferrofluidoberfläche jedoch, wie im anschließend beschriebenen Experiment, an Luft angrenzt, kann die Konvektionsströmung direkt beobachtet werden. Zwar ist es nach wie vor unmöglich, mit Licht in das Innere des Ferrofluids zu dringen, aber die Geschwindigkeitsverteilung bei Konvektion bewirkt räumlich periodische

Druckschwankungen im Ferrofluid, die sich in der Oberflächenkrümmung widerspiegeln. Das von einem Bereich mit positiver Krümmung reflektierte Licht eines parallel einfallenden Strahlenbündels wird in der Entfernung des halben Krümmungsradius fokussiert und liefert damit ein Abbild der Geschwindigkeitsverteilung und der Konvektionsamplitude im Ferrofluid.

Für dieses Experiment wurde ein Ferrofluid auf der Basis einer zäheren und schwerer flüchtigen Trägerflüssigkeit verwendet (APG 513A der Ferrofluidics Corporation) um rasche Verdunstung zu verhindern. Die übrigen Eigenschaften entsprachen unserem Standardferrofluid. Als Konvektionskammer wurde ein zylindrischer Aluminiumtopf mit 100 mm Durchmesser verwendet, dessen Bodentemperatur von thermostatgeregeltem Wasser konstant gehalten wurde. Die mittlere Oberflächentemperatur konnte mit einem Strahlungspyrometer auf 0,5 K genau bestimmt werden. Das Abbild der Oberflächenkrümmung wurde mit dem Reflex des 200-fach aufgeweiteten Strahls eines He-Ne-Lasers gewonnen.

An der Konvektion unter freier Oberfläche sind ohne Magnetfeld die archimedischen Auftriebskräfte und Oberflächenspannungen beteiligt. Welcher der beiden Einflüsse dominiert, zeigt sich am Vorzeichen der Krümmung und an der Konvektionsform. Marangoni-Konvektion, die bei kleinen Schichtdicken vorherrscht (vgl. Kapitel 4), favorisiert sechseckige Konvektionszellen, und die Oberflächenkrümmung ist im Bereich aufsteigender Flüssigkeit positiv (Louergue 1984). Tafel I.1a auf Seite 139 zeigt das entsprechende Abbild einer 3 mm dicken Ferrofluidschicht; in den Zentren der sechseckigen Konvektionszellen, wo die Flüssigkeit aufsteigt, bildet sich eine Senke, die als heller Punkt abgebildet wird. Mit zunehmender Schichtdicke gewinnt der archimedische Auftrieb an Einfluß. Bei $d=4$ mm zeigt sich Konvektion in Form unregelmäßiger Konvektionsrollen und die Oberflächenkrümmung ist im Bereich aufsteigender Flüssigkeit wie bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion negativ, d.h. die Gebiete absteigender Flüssigkeit erscheinen als helle Streifen (Tafel I.2a).

Im Magnetfeld kommt zu den genannten Kräften noch der magnetische Auftrieb und der magnetische Druck. Während sich der magnetische Druck unter fester Oberfläche indifferent verhält, dominiert sein Einfluß unter freier Oberfläche. Mit zunehmendem magnetischen Druck, der proportional zum Quadrat der Magnetisierung anwächst (vgl. (5.6)), wird die Flüssigkeitsschicht auch ohne Temperaturgradient zugunsten von in der Ebene dichtgepackten isolierten Ferrofluidtröpfchen instabil (Cowley & Rosen-

sweig 1967). Knapp über der Instabilitätsschwelle bilden sich Erhebungen, die von Senken mit sechseckiger Struktur umgeben sind (Tafel I.1b). Als Folge der Feldinhomogenitäten bei gekrümmter Oberfläche ändert sich die Teilchenkonzentration in der Grenzfläche, was an der veränderten Reflektivität sichtbar wird (Tafel I.1c). Sofern man mit der äußeren Feldstärke unterhalb der Instabilitätsschwelle bleibt, wird die von Konvektion verursachte Welligkeit der Oberfläche je nach Vorzeichen durch den Druck verstärkt oder geschwächt, denn das Ferrofluid sammelt sich bevorzugt an kalten Regionen an. Für die Rayleigh-Bénard-Konvektion bedeutet dies, daß die Senke bei absteigender kalter Flüssigkeit (Tafel I.2a) in Gegenwart eines vertikalen Feldes flacher wird oder daß sich sogar eine Erhebung ausbildet. Dann werden die Bereiche aufsteigender Flüssigkeit abgebildet (Tafel I.2b). In Tafel I.2c sind diese Konvektionsmuster mit und ohne Magnetfeld übereinander projiziert. Die Krümmungsradien, die zur Abbildung führten, betrugen in allen gezeigten Beispielen etwa 2 m.

Die bisherigen Betrachtungen zeigten, daß der magnetische Auftrieb bei festen und gut wärmeleitenden Begrenzungsplatten nachweisbar ist, aber die Instabilität wird von subkritischer Konvektion überlagert. Die Konvektionsströmung selbst kann nicht beobachtet werden. Unter freier Oberfläche dagegen ist Konvektion sichtbar, aber der magnetische Auftrieb bleibt wegen des vorherrschenden magnetischen Druckes unwirksam. Um sowohl den Beitrag subkritischer Konvektion als auch die Auswirkungen des magnetischen Druckes eliminieren zu können, bedarf es fester Begrenzungsplatten, deren Wärmeleitfähigkeit die des Ferrofluids nicht um mehrere Größenordnungen übertrifft. Wir verwendeten eine Glasplatte als obere Flüssigkeitsbegrenzung, die auf der Seite des Ferrofluids verspiegelt war (siehe Abschnitt 6.4). Die Konvektion verändert die Temperaturverteilung in der Glasplatte auf zweierlei Weise. Erstens vergrößert sie den vertikalen Temperaturgradienten mit dem konvektiven Wärmestrom. Aufgrund der thermischen Ausdehnung wird die Glasplatte dabei gekrümmt, was mit einem Interferometer sichtbar gemacht werden kann. Zur Elimination des Beitrags subkritischer Konvektion genügt es, die Randbereiche auszublenden. Zweitens wird die Temperatur in horizontaler Richtung moduliert und ermöglicht somit die Beobachtung des Konvektionsmusters mit der Schlierenmethode. Für Details der optischen Abbildung verweisen wir auf Abschnitt 6.5.

6.2 Magnetfeld

Die magnetische Feldstärke geht bei der magnetischen Konvektion nur indirekt über die pyromagnetische Konstante K ein. K nimmt seinen Maximalwert im lokalen Feld $H_s = 13,3 \cdot 10^3$ A/m an. Damit die Vertikalkomponente des lokalen Feldes den Wert H_s erreicht, muß das äußere vertikale Feld mindestens doppelt so groß sein (vgl. Glg. (3.13)). Die Feldspulen im Experiment wurden deshalb so ausgelegt, daß der vierfache Wert von H_s erreicht werden konnte. Da das horizontale Feld nur zur Orientierung der Konvektionsrollen dient und praktisch nicht vom entmagnetisierenden Feld verkleinert wird, genügte dafür eine Feldstärke von $H_s/2$.

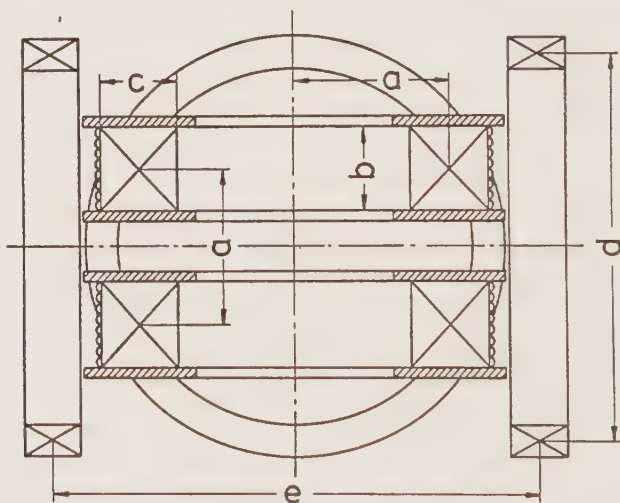


Bild 6.3 Schnitt durch die Spulenordnung ($a=0,22$ m, $b=0,12$ m, $c=0,11$ m, $d=0,55$ m und $e=0,70$ m).

In Bild 6.3 ist die gesamte Spulenkonfiguration dargestellt, in deren Zentrum sich die Konvektionskammer befand. Für die vertikalen Feldspulen wurde die Helmholtz-Anordnung in Form zweier konzentrischer Zylinderspulen mit dem mittleren Abstand $a=22$ cm gewählt, der auch dem mittleren Spulenradius entsprach. Wenn bei rechteckigem Spulenquerschnitt die Höhe b das 1,097-fache seiner Dicke c beträgt, dann gleicht das Feld im

Zentrum der Anordnung dem von zwei stromdurchflossenen Kreisringen mit Radius und Abstand R (Mie 1932):

$$R = a \cdot \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{c}{a}\right)^2\right). \quad (6.1)$$

Mit $b=12$ cm und $c=11$ cm waren die Feldinhomogenitäten im Bereich der Konvektionskammer kleiner als 0,1 %. Jede der Spulen bestand aus 2060 Windungen eines Kupferflachdrahtes mit $3 \times 1,8$ mm² Querschnitt. Der sich damit ergebende Spulenwiderstand von 10 Ω war dem Innenwiderstand der verfügbaren Netzgeräte angepaßt. Massive Spulenflansche aus Aluminium, die mit Messingabstandsrohren zusammengeschraubt wurden, sorgten für die erforderliche mechanische Festigkeit gegenüber den magnetischen Kraftwirkungen. An der Außenseite der Spulen war ein von Leitungswasser durchströmter Kühlmantel angebracht, über den die dissipierte Energie von maximal 1 kW abgeführt werden konnte. Für Feldstärken bis 20×10^3 A/m war Luftkühlung ausreichend.

Das horizontale Feld wurde von vier zylindrischen Spulen erzeugt, die paarweise auf zwei senkrecht zueinander stehenden Achsen angebracht waren. Damit konnte jede beliebige horizontale Feldrichtung ohne mechanische Änderung der Anordnung eingestellt werden. Jede der Spulen bestand aus 1000 Windungen eines Kupferflachdrahtes mit 3×1 mm² Querschnitt, und hatte bei Raumtemperatur einen Widerstand von 10 Ω . Aufgrund räumlicher Begrenzungen konnte die Helmholtz-Bedingung für die horizontalen Feldspulen nicht eingehalten werden. Wegen der im Vergleich zur Konvektionskammer großen Spulendurchmesser $d=55$ cm und Spulenabstände $e=70$ cm blieben die Feldinhomogenitäten im Bereich des Ferrofluids trotzdem unter 1%.

Die Feldspulen wurden von Konstantstrom-Netzgeräten gespeist. Zur Überwachung der Feldstärke wurde jeweils der Spannungsabfall an einem 40 m Ω Vorwiderstand über einen Meßstellenumschalter auf ein Voltmeter gelegt, dessen Anzeige von einem Prozeßrechner eingelesen und mit dem eingestellten Sollwert verglichen wurde. Bei eventuellen Abweichungen wurde die Stromstärke an den Netzgeräten entsprechend nachgeregelt. Die damit erreichte zeitliche Stabilität der Feldstärke war besser als 10^{-4} .

6.3 Temperaturregelung

Um die Konkurrenz zwischen magnetischen und archimedischen Auftriebskräften untersuchen zu können, sind Temperaturdifferenzen nötig, die praktisch das gesamte zulässige Intervall der flüssigen Phase des Ferrofluids ausnützen (vgl. Kap. 4). Wir führten Messungen bis zu Temperaturdifferenzen $\Delta T = \pm 50$ K durch. Die mittlere Temperatur wurde konstant auf 35°C gehalten.

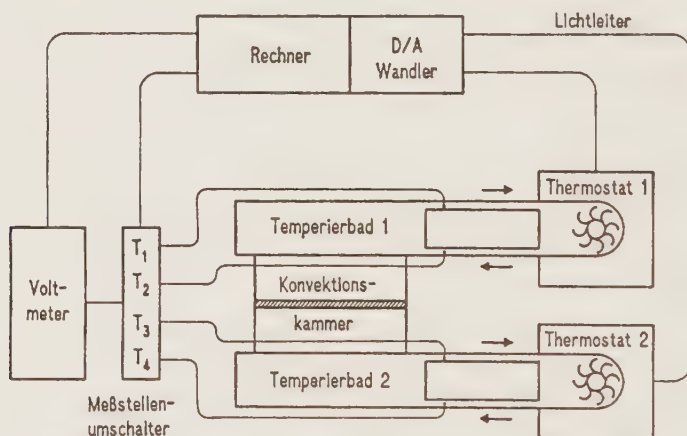


Bild 6.4 Temperaturregelkreis (schematisch).

Der Regelkreis für die Temperaturdifferenz ist in Bild 6.4 schematisch dargestellt. Von zwei Umwälzbadthermostaten, deren eingebaute Regelung die Thermostattemperatur auf $1/100$ K konstant auf dem eingestellten Wert hielt, wurde die Ober- und Unterseite des Ferrofluids temperiert. Aufgrund des Wärmestroms durch die Flüssigkeitsschicht von bis zu 30 W und aufgrund von Wärmeverlusten an die Umgebung gibt es ein Temperaturgefälle zwischen Thermostattemperatur und Temperierbad, das von der Pumpleistung der Thermostate (ca 4 l/min) abhängt. Die Temperatur des Temperierbades wurde am Einlaß- und Ausflußventil mit in Eiswasser kalibrierten Platinwiderständen auf $1/100$ K genau gemessen. Die Abweichungen der beiden Temperaturen blieben unter 0,1 K. Um Aufheizeffekte durch das Meßgerät zu vermeiden, wurden die Platinwiderstände ständig mit konstantem Strom (2,577 mA) versorgt. Der Spannungsabfall wurde

von einem Meßstellenumschalter auf ein Voltmeter geschaltet, dessen Anzeige vom Rechner eingelesen werden konnte. Der Mittelwert der beiden Temperaturen wurde mit dem vom Programm vorgegebenen Wert verglichen und bei Abweichungen an den Thermostaten nachgeregelt. Als Steuerleitungen zwischen Rechner und Thermostat wurden Lichtleiter verwendet, um den Leistungsteil vom Meßapparat galvanisch zu trennen.

Da die Heizleistung der Thermostate mit 1kW wesentlich größer als ihre Kühlleistung war (ca. 100...200 W), wurde die Aufheizgeschwindigkeit programmgesteuert der kleineren Abkühlgeschwindigkeit angepaßt. Damit konnte die mittlere Temperatur in der Flüssigkeitsschicht auch während des Hochfahrens der Temperaturdifferenz auf dem konstanten Wert von 35 °C gehalten werden, wodurch die Einstellzeiten für den stationären Zustand minimalisiert wurden. Die Asymmetrie aufgrund der verschiedenen Materialien von Boden- und Deckplatte wurde durch entsprechend gewählte Plattendicken ausgeglichen. Als typische Relaxationszeit für den stationären Zustand ergab sich $\tau=100$ s. Mit der Aufheiz- bzw. Abkühlgeschwindigkeit der Thermostate von 0,5 K/min konnte die Temperaturdifferenz ΔT über die Schicht dem programmierten Temperaturverlauf praktisch ohne Verzögerung folgen.

6.4 Konvektionskammer

Die für quantitative Messungen verwendete Konvektionskammer ist in Bild 6.5 im Schnitt und in Bild 7.8 auf Seite 138 in der Draufsicht dargestellt.

Die Bodenplatte der Konvektionskammer bestand aus einem Aluminiumkolben, dessen Position innerhalb des Plexiglaszylinders (siehe Bild 6.5) durch ein Feingewinde mit dem Gesamthub von 10 mm und der Genauigkeit von 1/100 mm eingestellt werden konnte. Der Plexiglaszylinder bildete gleichzeitig den Auflagering für die Deckelplatte aus 6mm dickem Spezialglas (siehe Abschnitt 6.5). Zwei gegenüberliegende Bohrungen im Plexiglaszylinder dienten als Einfüll- und Austrittsöffnungen für das Ferrofluid bzw. die Luft in der Kammer. Der durchsichtige Mantel ermöglichte blasenfreies Füllen der Kammer. Während der Experimente dienten Einfüll- und Austrittsöffnungen der Druckentlastung. Die Konstanz der Schichtdicke und der mittleren Ferrofluidtemperatur konnte anhand des Flüssigkeits-

pegels in den zur Druckentlastung angebrachten Steigrohren überwacht werden.

Die Bodenplatte befand sich in thermischem Kontakt mit einem vom Thermostat temperierten Kupferblock. Zum Temperieren der Flüssigkeits- oberseite wurde Wasser direkt durch den 2 mm dicken Spalt zwischen der Deckelplatte und einer weiteren Glasplatte gepumpt, die die obere Begrenzung der Konvektionskammer bildete. Der Wasserstrom wurde von parallelen Schlitzten, die in den Andruckring zwischen den beiden Glasplatten eingefräst waren, homogenisiert und seine Temperatur wurde mit Platinwiderstandsfühlern in den Kupferdüsen gemessen, durch die das Wasser vom Thermostat zu- bzw. abfloß.

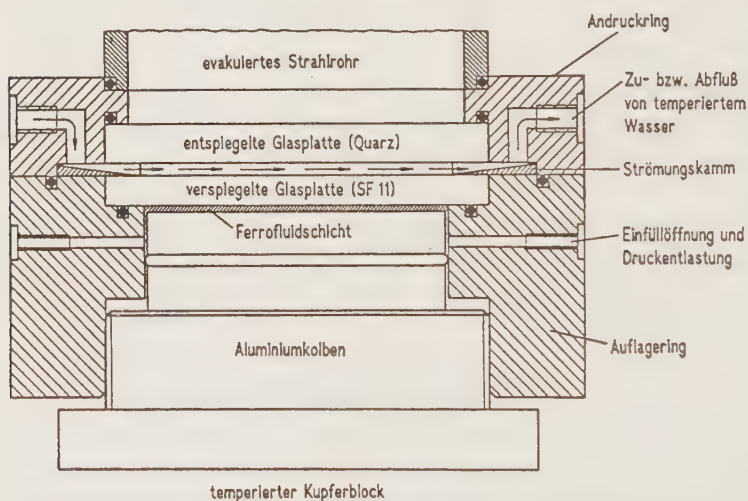


Bild 6.5 Schnitt durch die zur optischen Abbildung verwendete Konvektionskammer.

Die Deckelplatte war auf der an das Ferrofluid angrenzenden Seite mit einer Aluminiumschicht ($< 1 \mu\text{m}$) verspiegelt und mit einer Quarzschicht versiegelt. Mit Hilfe von $20 \mu\text{m}$ dünnen Glimmerplättchen zwischen der Deckelplatte und dem Auflage- bzw. Andruckring wurde die Deckelplatte sattelförmig vorgekrümmt. Damit konnten Verzerrungen der Glasplatte, die sich bei der Abbildung der Schlieren in großen Entfernungen störend auswirken, nachträglich durch entsprechende Variation des Andrucks

korrigiert werden. Die obere Begrenzungsplatte war auf ihrer Außenseite für Licht mit der Wellenlänge des He-Ne-Lasers (633 nm) entspiegelt. Aufgrund des relativ kleinen Unterschieds der optischen Dichten von Wasser und Glas erübrigte sich die Entspiegelung auf der Seite des Temperierbades für beide Glasplatten. Um Niederschlag von Kondenswasser an der oberen Begrenzungsplatte und Schlieren durch thermische Konvektion in der Luft über der Platte zu vermeiden, wurde der Raum zwischen der Glasplatte und dem Strahlteilerwürfel (Abschnitt 6.5) evakuiert.

Der Durchmesser $2 \cdot l$ der zylindrischen Ferrofluidschicht, die auf ihrer ganzen Fläche für die Schlierenabbildung zugänglich war, betrug 63 mm. Die Schichtdicke d konnte von 0 bis 10 mm variiert werden. Im Experiment wurden Schichtdicken d zwischen 1 mm und 4 mm vermessen, für die das Aspektverhältnis $\Gamma = l/d$ von 32 auf 8 abnahm.

6.5 Optische Abbildung

Thermische Konvektion wird im wesentlichen durch ihren Wärmetransport und die räumliche Verteilung der Konvektionsrollen charakterisiert. Beide Eigenschaften lassen sich anhand ihrer Auswirkungen auf die Glasplatte bestimmen, die das Ferrofluid bedeckt. Die dazu verwendete optische Anordnung ist in Bild 6.6 dargestellt.

Der 50- bis 200-fach aufgeweitete Strahl eines He-Ne-Lasers fällt senkrecht auf die das Ferrofluid bedeckende Glasplatte und wird dort reflektiert. Da die der Flüssigkeit zugewandte Seite verspiegelt ist, durchläuft der Strahl die Glasplatte zweimal. Die optischen Weglängendifferenzen, die der Strahl dabei senkrecht zu seiner Ausbreitungsrichtung erfährt, lassen sich dann entweder durch Interferenz mit dem von einem Planspiegel reflektierten Licht auf Schirmposition S_1 beobachten oder, bei ausgeblendetem Referenzstrahl, durch die Intensitätsverteilung des gebeugten Lichts auf Schirmposition S_2 . Wie die Strömung in der Flüssigkeit die optische Weglänge in der Glasplatte beeinflusst, wird im folgenden quantitativ analysiert werden.

Unter stationären Bedingungen ist die Wärmestromdichte durch die Flüssigkeitsschicht und die sie bedeckende Glasplatte identisch. Aufgrund

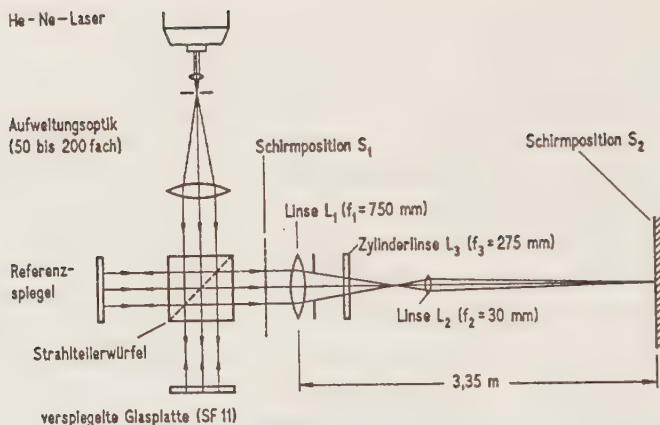


Bild 6.6 Anordnung zur optischen Abbildung des Konvektionsmusters und zur Wärmestrommessung.

der endlichen Wärmeleitfähigkeit $k_{\text{Glas}} = 0,737 \text{ W/(K}\cdot\text{m)}$ der Glasplatte mit der Dicke $d_{\text{Glas}} = 6 \text{ mm}$ verursacht die Wärmestromdichte j_z die Temperaturdifferenz

$$\Delta T_{\text{Glas}} = - \frac{d_{\text{Glas}}}{k_{\text{Glas}}} \cdot j_z \quad (6.2)$$

zwischen ihrer Ober- und Unterseite, die ihrerseits wegen der thermischen Ausdehnung $\gamma_{\text{Glas}} = 6,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ des Spiegelmaterials eine zusätzliche Verformung mit dem Krümmungsradius

$$R = \frac{d_{\text{Glas}}}{\Delta T_{\text{Glas}} \cdot \gamma_{\text{Glas}}} \quad (6.3)$$

bewirkt. Obwohl die Größenordnung typischer Krümmungsradien etwa 1 km beträgt, läßt sich die Krümmung im Interferometer ausmessen. Die Interferenzstreifen auf den Bildern 3a bis 3c auf Tafel I (Seite 139) stellen Höhenlinien der Flüssigkeitsoberfläche mit dem vertikalen Abstand der Lichtwellenlänge $\lambda_{\text{Licht}} = 633 \text{ nm}$ dar. Ihre hyperbolische Form ist eine Konsequenz der sattelförmigen Vorkrümmung der Glasplatte. Trägt man den Höhenunterschied zum Sattelpunkt gegen das Quadrat des horizontalen Abstandes vom Zentrum auf, so erhält man die beiden Hauptkrümmungsradien

dien R_1 und R_2 aus der Steigung der jeweiligen Geraden und mit (6.2) und (6.3) den Wärmestrom durch die Flüssigkeitsschicht.

Zur praktischen Durchführung der Wärmestrommessungen ist die Auswertung der Interferogramme zu aufwendig. Statt dessen wurde die Brennweite

$$f = \frac{1}{2} R \quad (6.4)$$

des reflektierten Lichtbündels mittels eines abgewandelten Besselverfahrens bestimmt. Die direkte Messung der Brennweiten ist nicht immer möglich, weil ihre Beträge sehr groß sind, und weil ihr Vorzeichen bei positivem Wärmestrom auch negativ werden kann (vgl. (6.2)). Das reflektierte Licht wurde mit der Sammellinse L_1 auf endlichen Abstand fokussiert. Je nach Vorzeichen der Brennweite f ist die Gesamtbrennweite f_{ges} von Spiegel und Linse L_1 größer oder kleiner als deren Brennweite $f_1=750$ mm. Da f sehr viel größer als f_1 ist, gilt für die Gesamtbrennweite f_{ges} in erster Näherung

$$f_{\text{ges}} = f_1 \cdot (1 - f_1/f) =: f_1 - \Delta f,$$

wobei für Δf mit (6.3) und (6.4)

$$\Delta f = 2f_1^2 \frac{\gamma_{\text{Glas}}}{\kappa_{\text{Glas}}} j_z \quad (6.5)$$

folgt. Das von der Kombination Linse L_1 und Spiegel entworfene reelle Zwischenbild wurde mit einer zweiten Sammellinse L_2 , deren Brennweite $f_2=30$ mm betrug, auf den Schirm S_2 im Abstand von ca. $b_2=2,6$ m abgebildet. Die Gegenstandsweite g_2 ist wegen der im Verhältnis zur Brennweite großen Bildweite b_2 praktisch konstant und gleich der Brennweite f_2 . Deshalb kann die zur scharfen Abbildung auf Schirm S_2 nötige Verschiebung der Linsenposition L_2 mit der Brennweitendifferenz Δf gleichgesetzt werden.

Die Linse L_2 war auf einem Verschiebeschlitten von 200 mm Länge angebracht und konnte mittels eines Schrittmotors auf 1/100 mm genau positioniert werden. Zur Erleichterung der Brennweitmessung wurde der Brennpunkt mit Hilfe einer Zylinderlinse L_3 zu einer Linie auseinandergezogen, deren minimale Breite gut reproduziert werden konnte. Jede

Messung wurde, nachdem sich ein stationärer Zustand eingestellt hatte, einigemale wiederholt. Die Standardabweichung für die Linsenposition war kleiner als 0,3 mm, woraus sich mit (6.5) ein Fehler von $1/10$ W für den Wärmestrom durch die Flüssigkeit ergab. Der Absolutwert des Wärmestroms wurde durch eine Vergleichsmessung an einem zähen Silikonöl mit bekannter Wärmeleitfähigkeit ermittelt.

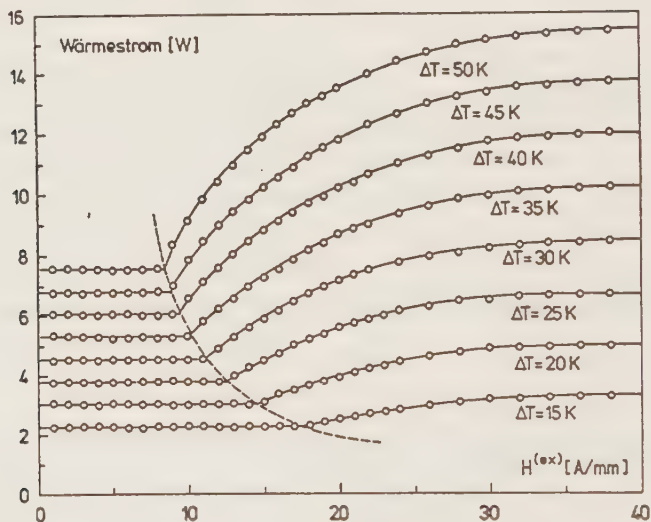


Diagramm 6.7 Wärmestrom durch eine 3 mm dicke Ferrofluidschicht, die von oben beheizt wird, als Funktion der Vertikalkomponente des äußeren Feldes H .

In Diagramm 6.7 ist das Ergebnis einer typischen Meßserie an einer von oben beheizten 3 mm dicken Ferrofluidschicht dargestellt. Bei jeweils konstanter Temperaturdifferenz wurde die Vertikalkomponente des äußeren Feldes in 10^3 A/m-Schritten erhöht und der Wärmestrom gemessen. Anschließend wurde die gleiche Messung bei abnehmender Feldstärke wiederholt, um die Einsatzschwelle der Konvektion auf mögliche Hystereiseffekte zu überprüfen. Ähnliche Messungen wurden bei allen Schichtdicken zwischen 1 und 4 mm mit homogenem vertikalen Feld, mit einem überlagerten vertikalen Gradienten $G^{(ex)} = 70 \cdot 10^3$ A/m² und mit einer überlagerten horizontalen Feldkomponente $H_x = 6 \cdot 10^3$ A/m durchgeführt. Nach jedem Meßzyklus wurde die Messung vom Beginn des Zyklus wiederholt, um eventuelle zeitliche Änderungen durch Sedimentation festzustellen.

len. Abweichungen ergaben sich nur in Ausnahmefällen, wenn z.B. große Temperaturgradienten und Magnetfelder über einen längeren Zeitraum (einige Stunden) auf die ruhende Flüssigkeitsschicht wirkten. Bei einer Ferrofluidschicht, die sich meistens im konvektiven Zustand befand, konnte dagegen auch nach mehreren Wochen noch keine Änderung der Flüssigkeitseigenschaften beobachtet werden. Zur Auswertung wurden nur Meßzyklen verwendet, die innerhalb der Fehlergrenzen reproduzierbar waren.

Obwohl die optische Methode auf deutlich größere Meßfehler für den Wärmestrom führt als das in Abschnitt 6.1 beschriebene Verfahren, liefert sie ein genaueres Kriterium für die Einsatzschwelle der Konvektion, da der nivellierende Beitrag der Randkonvektion durch Ausblenden der Ränder eliminiert werden kann. Im Zentrum der Konvektionskammer, das durch eine 40 mm Lochblende abgebildet wurde, ist der subkritische Wärmestrom unabhängig von der äußeren Feldstärke und steigt bei einem kritischen Wert steil an. Der kritische Wert der Feldstärke kann mit einer Genauigkeit von $\pm 5\%$ reproduziert werden. Demgegenüber ist der Einfluß der Schichtdickenänderung durch die Spiegelkrümmung von weniger als 0,1% unmeßbar klein.

Neben der Zunahme des vertikalen Temperaturgradienten in der Glasplatte bewirkt die Konvektionsströmung auch eine Modulation seines Betrages in horizontaler Richtung. Der Betrag wird vergrößert, wo die Flüssigkeit aufsteigt und entsprechend verkleinert, wo sie wieder absinkt. Die zugehörige Änderung der optischen Dicke der Glasplatte kann mit der gleichen optischen Anordnung, wie oben beschrieben, abgebildet werden. Da sich die horizontalen Längenskalen von Spiegelkrümmung und Temperaturmodulation um mehr als eine Größenordnung unterscheiden, können Wärmestrom und Konvektionsmuster unabhängig voneinander beobachtet werden.

Wenn, wie in unserem Fall, die Wärmeleitfähigkeit der Glasplatte ungefähr fünf mal so groß ist wie die der Flüssigkeit, ergibt sich für die Temperaturverteilung an der Grenzfläche zur Glasplatte näherungsweise

$$\Theta^{(ex)}(z=d/2) \approx \frac{k^{(in)}}{k^{(ex)}} \Theta^{(in)}(z=0) = \frac{1}{5} \Theta^{(in)}(z=0). \quad (6.6)$$

Die in (6.6) vorkommenden Größen wurden in Kapitel 5 definiert. Zusammen mit der Lösung für $\Theta^{(in)}$ aus Abschnitt 5.4 erhalten wir für die Tem-

peraturverteilung, die von Konvektionsrollen mit dem Wellenvektor $\mathbf{a}$ verursacht wird

$$\Theta^{(ex)}(z=d/2) \approx \frac{\varepsilon \Delta T}{15} \cos(ax), \quad (6.7)$$

woraus mit der stationären Wärmeleitungsgleichung

$$\nabla^2 \Theta^{(ex)} = 0 \quad (6.8)$$

die Temperaturverteilung in der Glasplatte folgt:

$$\Theta^{(ex)} = \frac{\varepsilon \Delta T}{15} \cos(ax) \exp(a/2 - az). \quad (6.9)$$

Der Wellenvektor $\mathbf{a}$ wurde parallel zur x-Achse angenommen. Um eine große Empfindlichkeit bei der Abbildung des Konvektionsmusters zu erreichen, sollte die optische Weglänge $l_{opt} = n \cdot d_{Glas}$ stark von der Temperatur abhängen (n bezeichnet den Brechungsindex). Wir wählen deshalb ein Glas mit positivem Temperaturkoeffizienten dn/dT des Brechungsindex, weil sich dann thermische Ausdehnung und optische Dichteänderung in ihrer Wirkung addieren:

$$l_{opt}^{-1} \frac{d l_{opt}}{dT} = \gamma_{Glas} \cdot n + \frac{dn}{dT}. \quad (6.10)$$

Das verwendete Spiegelmaterial (SF 11 von der Firma Schott) besitzt bei der Wellenlänge $\lambda_{Licht} = 633 \text{ nm}$ einen Brechungsindex $n = 1,78$ mit dem Temperaturkoeffizienten $dn/dT = 9,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$. Mit dem linearen Ausdehnungskoeffizienten $\gamma_{Glas} = 6,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ erhalten wir für die thermooptische Konstante

$$l_{opt}^{-1} \frac{d l_{opt}}{dT} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}. \quad (6.11)$$

Da die Temperaturmodulation (6.9) exponentiell mit dem Abstand von der Grenzfläche zur Flüssigkeit abfällt, folgt für die wirksame Dicke der Glasplatte

$$d_{eff} = 2 \cdot \int_0^{d_{Glas}} \exp(-az) dz \approx \frac{2}{a}. \quad (6.12)$$

Der Faktor zwei ergibt sich aus der Tatsache, daß der Strahl die Schicht zweimal durchläuft. Für eine typische minimale Wellenlänge der Konvektionsströmung $\lambda_{\text{Konv}} = 3 \text{ mm}$ beträgt die effektive Dicke ungefähr 1 mm, und die Differenz der optischen Weglängen zwischen den Bereichen aufwärts- und abwärtsströmender Flüssigkeit

$$\Delta l = d_{\text{eff}} \cdot l_{\text{opt}}^{-1} \cdot \frac{d l_{\text{opt}}}{dT} \cdot \frac{2 \Delta T \varepsilon}{15} \quad (6.13)$$

erreicht bei $\Delta T \cdot \varepsilon = 30 \text{ K}$ den Wert $\Delta l = 84 \text{ nm}$. Auch die im Vergleich zur Lichtwellenlänge 633 nm kleine Weglängendifferenz äußert sich in Helligkeitsunterschieden, wenn der reflektierte Strahl mit einem Referenzstrahl interferiert. Allerdings setzt die interferometrische Beobachtung des Konvektionsmusters voraus, daß die relativen Abstände innerhalb des Interferometers auf Bruchteile von 1/10 der Lichtwellenlänge konstant bleiben. Dieser Anforderung genügt die Meßapparatur schon wegen der Spiegelkrümmung nicht. Aber benachbarte Strahlen erleiden bis auf die optischen Inhomogenitäten, die von der Konvektion verursacht werden, das gleiche Schicksal.

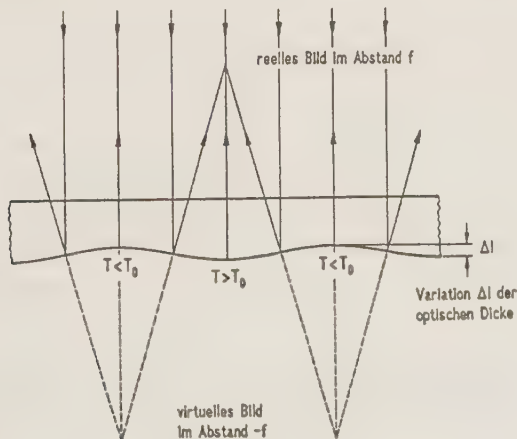


Diagramm 6.8 Schematische Darstellung der optischen Dicke der Glasplatte und des Strahlenganges von senkrecht einfallendem parallelem Licht.

Die Intensitätsmaxima, die durch konstruktive Interferenz benachbarter Strahlen entstehen, lassen sich deshalb in großer Entfernung vom Spiegel beobachten (siehe Diagramm 6.8). In Diagramm 6.9 ist die berechnete Intensitätsverteilung des an der Glasplatte reflektierten Lichtes für verschiedene Schirmabstände dargestellt. Als Maß für die Entfernung wurde die Brennweite

$$f = \frac{1}{\Delta l \cdot a^2} \quad (6.14)$$

gewählt, die durch die Forderung divergierender Intensität bei $x=0$ definiert ist. Mit (6.13) folgt für die Brennweite

$$f = \frac{90 \text{ m}}{\varepsilon \cdot \Delta T / K} \quad (6.15)$$

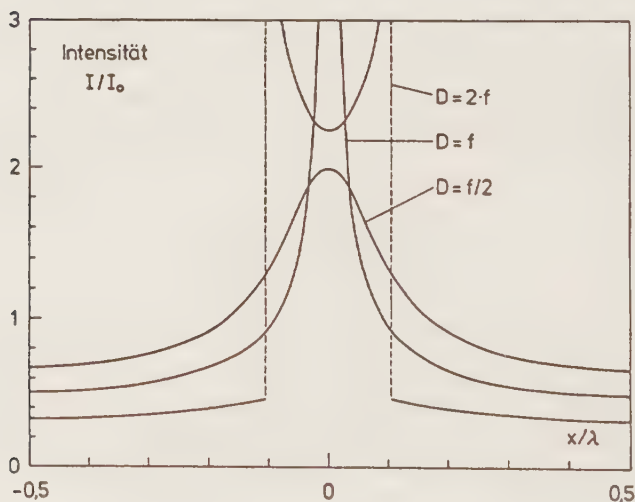


Diagramm 6.9 Intensitätsverteilung des reflektierten Lichtes in Einheiten der Intensität I_0 des einfallenden Lichtes für verschiedene Schirmabstände D .

Zur Berechnung der Intensitätsverteilung in Diagramm 6.9 wurde die Unschärfe aufgrund der Winkeldivergenz eines endlichen Strahldurchmessers nicht berücksichtigt. Sie beschränkt die maximale Distanz, bis zu der

Helligkeitsunterschiede aufgelöst werden können, auf

$$f_{\max} = 2 \cdot \frac{\lambda_{\text{Konv}}^2}{\lambda_{\text{Licht}}} \approx 30 \text{ m}, \quad (6.16)$$

woraus sich für die Empfindlichkeit mit (6.15)

$$\Delta T \cdot \varepsilon = 3 \text{ K} \quad (6.17)$$

ergibt. Das heißt, um Konvektion sichtbar machen zu können, muß die Amplitude ε bei einer Temperaturdifferenz von 30 K größer als 0,1 sein, bzw. die Temperaturstörung in der Oberfläche muß mit (6.7) größer als 0,2 K sein. Die Abschätzung der Empfindlichkeit wurde für den ungünstigsten Fall $\lambda_{\text{Konv}} = 3 \text{ mm}$ durchgeführt. Für größere Wellenlängen nimmt die Empfindlichkeit zu, weil die wirksame Dicke d_{eff} proportional mit λ_{Konv} und die Distanz $f_{\max}$ mit λ_{Konv}^2 anwächst.

Mit Hilfe des in den Strahlengang gebrachten Fernrohres, bestehend aus den Linsen L_1 und L_2 , wird die Bildweite auf den festen Schirmabstand verkürzt, auf dem sowohl das reelle als auch das virtuelle Bild dargestellt werden können. Die Zylinderlinse L_3 diente zur Kompensation der von der sattelförmigen Spiegelkrümmung verursachten elliptischen Verzerrung. Das reelle Bild zeigt Flüssigkeitsbereiche mit positiver Abweichung und das virtuelle Bild solche mit negativer Abweichung vom Mittelwert der Temperatur (vgl. Diagramm 6.8). Aufgrund der großen Schärfentiefe der Abbildung (vgl. Diagramm 6.9) des Konvektionsmusters war die Brönnweitenmessung zu ungenau, um eine weitere, von der Spiegelkrümmung unabhängige Bestimmung der Konvektionsamplitude ε zu ermöglichen. Typische Brönnweiten rangierten von 3 m bis 30 m, was bei einem Blendendurchmesser von 40 mm einer Bildgröße zwischen 0,1 m und 1 m auf dem Schirm S_2 entspricht.

Ein Beispiel für ein mit der beschriebenen Technik abgebildetes Konvektionsmuster ist in der Serie 4a bis 4c auf Tafel I dargestellt. Alle drei Bilder wurden mit einer von unten beheizten 3 mm dicken Ferrofluidschicht bei konstanter Temperaturdifferenz und verschwindendem Magnetfeld aufgenommen. Die Konvektionsmuster sind stationär. Ihre Form hängt davon ab, wie der Nichtgleichgewichtszustand erreicht wurde. Im ersten

Beispiel (4a), bei dem der Temperaturgradient sehr schnell auf einen superkritischen Wert erhöht wurde, folgen die Konvektionsrollen dem geometrischen Rand des zylindrischen Behälters. Nachdem ein horizontales Magnetfeld angelegt wurde, ordneten sich die Konvektionsrollen parallel zum Feld an. Die Orientierung der Rollen bleibt auch nach dem Ausschalten des Magnetfeldes bestehen. Bild 4b zeigt die Zonen aufsteigender erwärmter Flüssigkeit, während Bild 4c die Bereiche absinkender kalter Flüssigkeit für denselben Zustand wiedergibt.

Ein wesentlicher Vorteil der optischen Beobachtungstechnik besteht darin, daß Fehlerquellen, wie z.B. Verunreinigungen, Luftblasen oder Ränder sofort sichtbar werden. Sie lassen sich dann entweder beseitigen oder in ihrem Wirkungsbereich eingrenzen. Letzteres soll für den Einfluß der lateralen Begrenzungen anhand der Serie 5a bis 5c auf Tafel I demonstriert werden. Alle drei Bilder wurden mit einer von oben behielten 4 mm dicken Ferrofluidschicht bei konstanter Temperaturdifferenz aufgenommen. Ohne äußeres Magnetfeld ist keine Konvektion sichtbar (5a). Das Helligkeitsprofil gibt die Intensitätsverteilung des aufgeweiteten Laserstrahls wider. Nach dem Anlegen eines subkritischen Magnetfeldes tritt Konvektion, entsprechend der Symmetrie der Feldstörungen am Rand, in Form von konzentrisch angeordneten Walzen auf, deren Amplitude zur Mitte der Konvektionskammer hin abnimmt (5b). Die typische Reichweite des Randeinflusses beträgt etwa zwei bis drei Wellenlängen. Wird das vertikale Magnetfeld auf einen superkritischen Wert erhöht, dann setzt Konvektion auch im Zentrum der Kammer ein und die Konvektionsrollen enden senkrecht auf dem lateralen Rand (5c). Die Umorientierung der Konvektionsrollen im Randbereich ermöglicht ein rascheres Abklingen der Konvektionsamplitude vom Wert ϵ im Zentrum auf den Wert Null am Rand (Newell & Whitehead 1969), und wird deshalb vorzugsweise realisiert. Da sich der Randeinfluß auch im superkritischen Bereich über zwei bis drei Wellenlängen erstreckt, ist es nicht sinnvoll, bei festem horizontalem Durchmesser der Konvektionskammer zu noch größeren Schichtdicken überzugehen, weil dann praktisch das gesamte Konvektionsgebiet vom Rand beherrscht wird.

7. Ergebnisse

Die treibenden Kräfte der thermischen Konvektion in Ferrofluiden werden vollständig durch die beiden Rayleigh-Zahlen Ra und Rm beschrieben. Der konvektive Wärmestrom wurde jedoch nicht direkt als Funktion von Ra und Rm gemessen, sondern als Funktion der äußeren Feldstärke H und der Temperaturdifferenz ΔT zwischen Flüssigkeitsober- und -unterseite (vgl. Diagramm 6.7). Um die Meßergebnisse für die einsetzende Konvektionsströmung in Abschnitt 7.2 mit den Berechnungen vergleichen zu können, müssen die Meßgrößen zunächst auf die entsprechenden dimensionslosen Verhältnisse reduziert werden. In den Abschnitten 7.3 und 7.4 werden dann die Auswirkungen des Magnetfeldes bzw. seiner Änderungen auf schon bestehende Konvektionsmoden besprochen.

7.1 Auswertung der Messungen

Die Ergebnisse zweier Meßserien an einer 1,5 mm bzw. 2 mm dicken Ferrofluidschicht sind in den Diagrammen 7.1 und 7.2 für ein Temperaturintervall von -20 K bis $+30$ K dargestellt. Der Wärmestrom wurde in beiden Diagrammen auf die dimensionslose Nußelt-Zahl Nu umgerechnet, indem der gemessene Wärmestrom durch den Wärmestrom im subkritischen Feld bei gleicher Temperaturdifferenz dividiert wurde. Der glatte Kurvenverlauf ergibt sich durch Interpolation zwischen den Meßpunkten, die der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet wurden (Die Meßpunkte wurden wie für Diagramm 6.7 in äquidistanten Schritten der Feldstärke aufgenommen, und fallen deshalb nicht notwendigerweise mit den eingezeichneten Linien konstanten Wärmestroms zusammen).

Die Diagramme 7.1 und 7.2 zeigen, daß im Feld $H=0$ Konvektion nur dann auftritt, wenn die Flüssigkeitsschicht von unten beheizt wird ($\Delta T < 0$). Der magnetische Auftrieb im homogenen vertikalen Magnetfeld unterstützt die thermische Konvektion und verkleinert damit nicht nur den Betrag der kritischen Temperaturdifferenz, sondern ermöglicht thermische Konvektion auch für positive Temperaturdifferenzen. Mit zunehmender Schichtdicke nimmt der Einfluß des Magnetfeldes auf die Konvektionsströmung bei negativer Temperaturdifferenz rasch ab, weil dann der innere Feldgradient entsprechend kleiner wird. Gleichzeitig verringern sich die

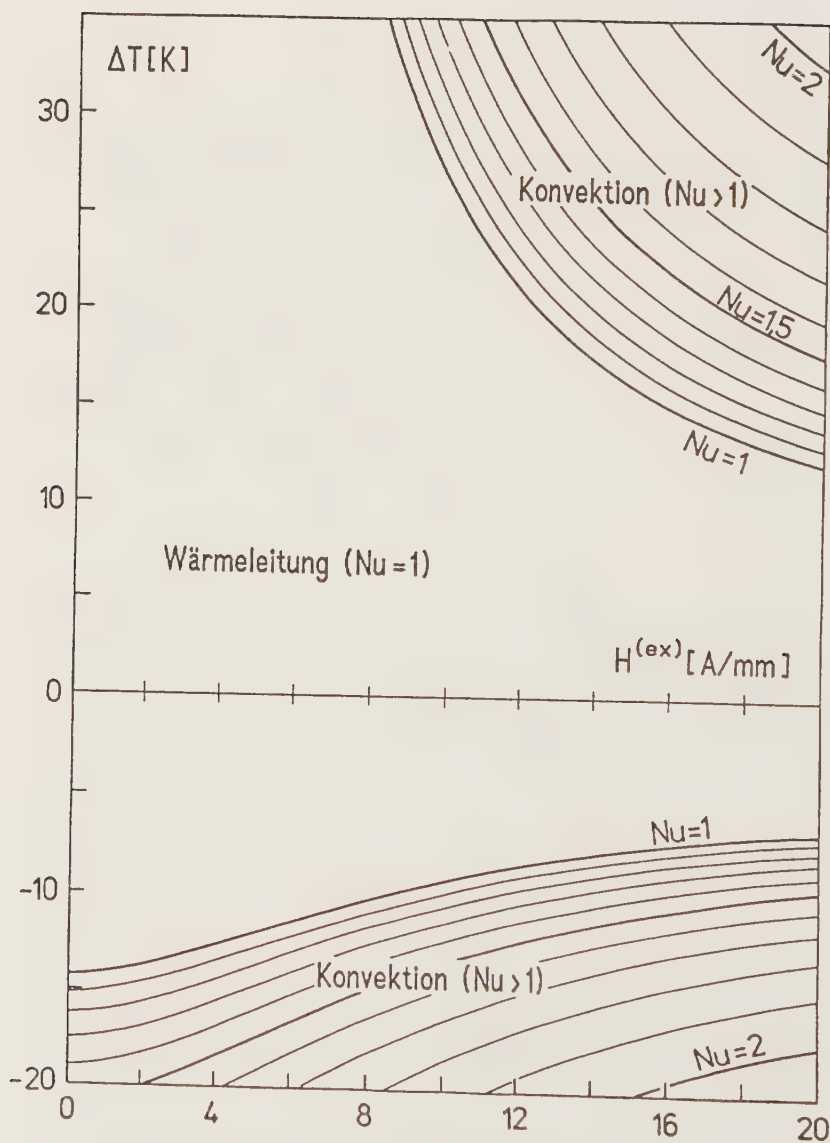


Diagramm 7.1 Nußelt-Zahl als Funktion der Temperaturdifferenz und der Feldstärke für eine 1,5 mm dicke Ferrofluidschicht.

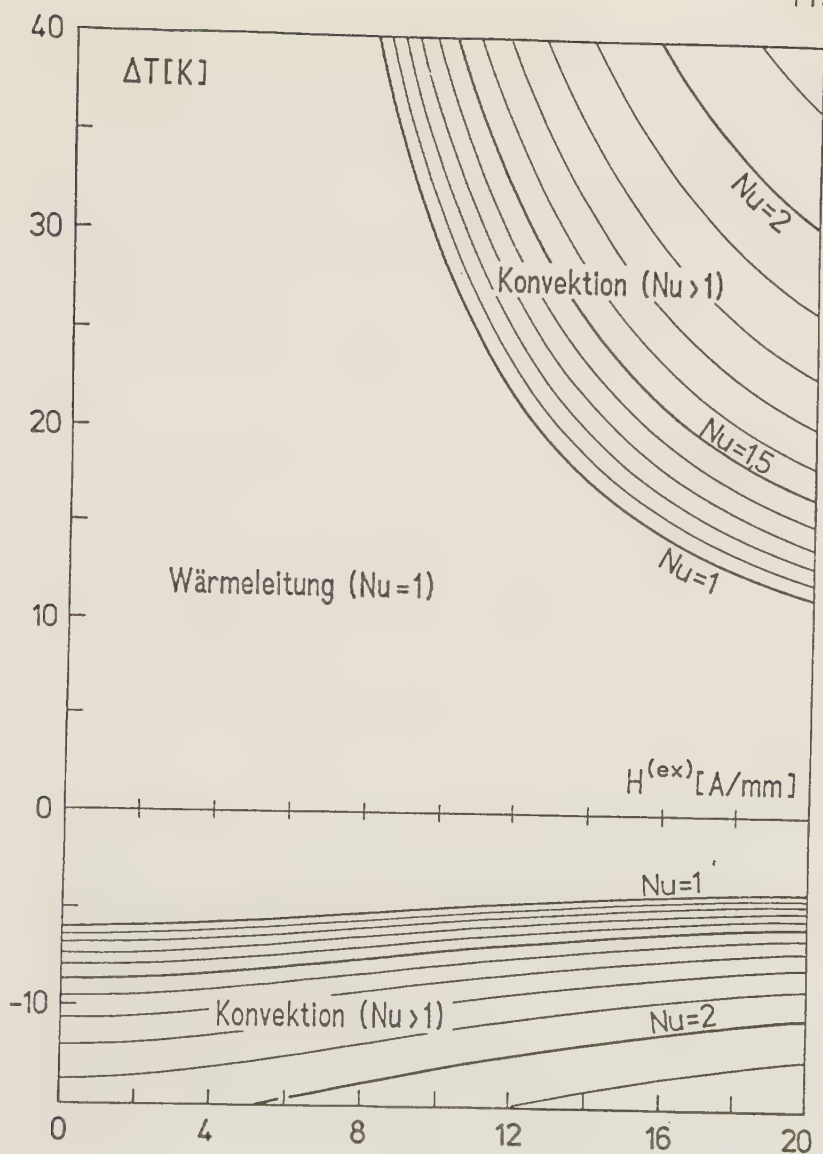


Diagramm 7.2 Nußelt-Zahl als Funktion der Temperaturdifferenz und der Feldstärke für eine 2 mm dicke Ferrofluidschicht.

kritische Temperaturdifferenz und der Wärmestrom an der Instabilitätsschwelle proportional zu d^{-3} bzw. proportional zu d^{-4} . Für Schichtdicken d , die größer als 2 mm sind, reicht deshalb die Genauigkeit der Wärmestrommessung nicht mehr aus, um die Instabilitätsschwelle experimentell bestimmen zu können. Bei positiven Temperaturgradienten ändert sich der Verlauf von $\Delta T_c(H)$ für Schichtdicken zwischen 1 mm und 4 mm nur geringfügig. Das Intervall der verwendeten Schichtdicken wurde nämlich gerade auf das Plateau von Diagramm 4.3 beschränkt, in dem die kritische Temperaturdifferenz ein Minimum durchläuft. Die Experimente bestätigen die Überlegungen von Kapitel 4 und ermöglichen damit Messungen mit vergleichbarer Präzision über einen großen Bereich magnetischer Rayleigh-Zahlen.

Wenn man dem homogenen Magnetfeld einen vertikalen Gradienten G überlagert, dann verschiebt sich die kritische Feldstärke zu größeren oder kleineren Werten, je nachdem, ob der Feldgradient parallel oder antiparallel zum Temperaturgradienten gerichtet ist. Die Verschiebung ist proportional zum Verhältnis zwischen dem bekannten äußeren Gradienten G und dem unbekannten inneren Gradienten $K \cdot \Delta T / (d \cdot (1 + \chi))$, und bildet somit ein Maß für die pyromagnetische Konstante K (vgl. (4.8)). Da die Verschiebung der kritischen Feldstärke mit einem äußeren Gradienten $G = 70 \cdot 10^3 \text{ A/m}^2$ in der Regel nur etwa dreimal so groß wie der Meßfehler war, liefert sie nur eine grobe Abschätzung der pyromagnetischen Konstante. Mit größeren Feldgradienten ist die Krümmung der Äquipotentialflächen nicht mehr vernachlässigbar (vgl. Abschnitt 4.1).

Die Wirkung einer horizontalen Feldkomponente besteht im wesentlichen in der Orientierung der Konvektionsrollen. Weil die magnetische Zustandsgleichung nicht linear ist, beeinflusst das horizontale Feld aber auch den inneren Feldgradienten: Die pyromagnetische Konstante wächst schwächer als proportional mit der Feldstärke H an (Abschnitt 3.3). Dies führt dazu, daß die Projektion $K \cdot H_z / H$ und damit auch der innere Feldgradient bei konstantem vertikalen Feld H_z abnimmt, sobald ein horizontales Feld H_x angelegt wird. Der Einfluß eines horizontalen Feldes $H_x = 6 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ ist zwar klein, aber deutlich sichtbar und unterstreicht damit die Notwendigkeit der nichtlinearen Feldkorrekturen im folgenden.

Um die Meßergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen vergleichen zu können, muß man die Materialeigenschaften der Flüssigkeit als Funktion der Temperatur und des Magnetfeldes kennen. Die typischen Unsicherhei-

ten der Absolutwerte der Einzelgrößen, aus denen sich die Rayleigh-Zahlen zusammensetzen (z.B. Ausdehnungskoeffizient, Viskosität, Suszeptibilität oder pyromagnetische Konstante), betragen etwa 10 %, und addieren sich entsprechend zu einem Gesamtfehler von 30 bis 50 % auf. Allerdings ist die genaue Kenntnis der einzelnen Faktoren für die Auswertung der Messungen überflüssig, weil sie nur in Form zweier fester Potenzprodukte in Ra bzw. Rm eingehen. Wir fassen deshalb alle Materialgrößen in Ra bzw. Rm ähnlich wie im Kapitel 4 zu neuen Größen c'_a und c'_m zusammen

$$c'_a := \frac{\gamma g}{\alpha \nu} , \quad (7.1a)$$

$$c'_m := \frac{\mu_0 K^2}{\alpha \eta (1 + \chi)} , \quad (7.1b)$$

und erhalten somit eine einfache Relation zwischen den Rayleigh-Zahlen und den im Experiment variierten Größen ΔT und d :

$$Ra = c'_a \Delta T d^3 \quad \text{und} \quad (7.2a)$$

$$Rm = c'_m \Delta T^2 d^2 . \quad (7.2b)$$

Da die mittlere Temperatur im Experiment konstant gehalten wurde, hängen c'_a und c'_m in erster Näherung nicht von der Temperaturdifferenz ab. Quadratische und höhere Korrekturterme werden vernachlässigt. Für die Feldabhängigkeit der Größen c'_a und c'_m gibt es keine vergleichbare Näherung, weil die mittlere Feldstärke über ein relativ großes Intervall verändert wurde. Aber im Bereich $H < H_s$ können wir von der Potenzreihenentwicklung (3.12) der magnetischen Zustandsgleichung Gebrauch machen. Alle Parameter sind in erster Näherung konstant bzw. wie K proportional zum Magnetfeld, und besitzen in zweiter Näherung einen Korrekturterm der Form

$$\left(1 + c \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right) ,$$

wobei $|c| < 1$ gilt. Wenn wir die Korrekturglieder, die in Kapitel 3.3 abge-

geschätzt wurden, zusammenfassen und die relativ kleine Änderung der Viskosität im Magnetfeld vernachlässigen, dann können wir mit

$$c'_a = c_a \quad \text{und} \quad (7.3a)$$

$$c'_m = c_m \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right) \quad (7.3b)$$

neue Materialgrößen c_a und c_m definieren, die nicht mehr vom Magnetfeld und der Temperaturdifferenz abhängen. Beide Größen lassen sich mit

$$Ra = c_a \Delta T d^3 \quad \text{und} \quad (7.4a)$$

$$Rm = c_m \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{H_s} \right)^2 \right) \Delta T^2 d^2 \quad (7.4b)$$

indirekt bestimmen, indem man den gemessenen Verlauf $\Delta T_c(H)$ mit den berechneten Kurven $Ra_c(Rm)$ vergleicht.

Der theoretische Verlauf $Ra_c(Rm)$ hängt über das innere bzw. äußere Permeabilitätsverhältnis I und J selbst von den Eigenschaften der Flüssigkeit ab (vgl. Kapitel 5.3 und 5.4). Da aber die Änderung z.B. der kritischen archimedischen Rayleigh-Zahl bei fester magnetischer Rayleigh-Zahl über den ganzen dem Ferrofluid zugänglichen Bereich von

$$\begin{aligned} 1/2 \leq J \leq 1 \quad \text{und} \\ 1 \leq I \leq 2 \end{aligned}$$

weniger als 10 % beträgt, können wir die Meßdaten, ohne die Genauigkeit zu beeinträchtigen, an die berechneten Kurven für $J=1/2$ und $I=1$ anpassen.

Zur Festlegung der Materialgrößen c_a und c_m genügen zwei Wertepaare $(\Delta T, H)$ an der Einsatzschwelle zur Konvektion. Zweckmäßigerweise wählt man hierfür zwei weit auseinanderliegende Meßpunkte aus, für die die zugrunde liegenden Näherungen (Boussinesq-Approximation, Vernachlässigung der Randeinflüsse) vergleichsweise gut erfüllt sind, und für die die Empfindlichkeit der Meßapparatur am größten ist. Wir verwendeten den

Wert der kritischen Temperaturdifferenz $\Delta T_c = -(14,2 \pm 0,3) \text{ K}$ an einer von unten beheizten 1,5 mm dicken Ferrofluidschicht im Feld $H=0$ und den Wert der kritischen Feldstärke $H_c = (8,4 \pm 0,4) \text{ A/mm}$ bei einer konstanten Temperaturdifferenz von +50 K an einer 3 mm dicken Schicht. Der Vergleich mit den entsprechenden theoretischen Werten ergibt

$$c_a = -(35,5 \pm 1) \text{ K}^{-1} \text{ mm}^{-3} \quad \text{und} \quad (7.5a)$$

$$c_m = (29 \pm 2) \text{ K}^{-2} \text{ mm}^{-2}, \quad (7.5b)$$

die beide mit den Angaben unseres Standardfluids verträglich sind.

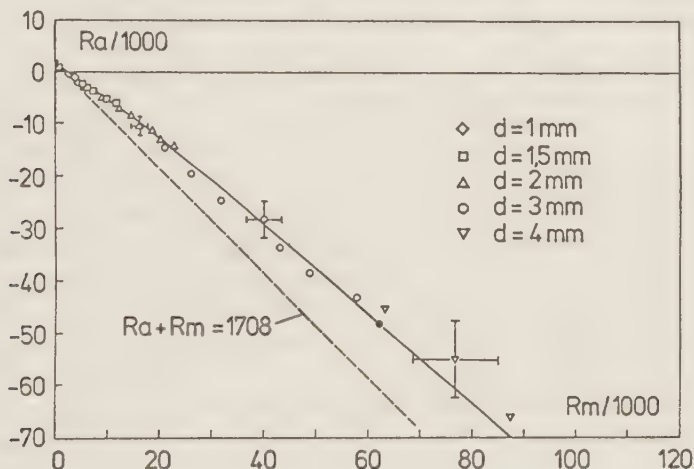


Diagramm 7.3 Kritische archimedische Rayleigh-Zahl als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl. Die durchgezogene Kurve gibt den theoretischen Verlauf für $I=1$ und $J=1/2$ wider (vgl. Diagramm 5.5).

In Diagramm 7.3 sind die mit Gleichung (7.4) umgerechneten Meßergebnisse der kritischen archimedischen Rayleigh-Zahl als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl dargestellt. Die zur Anpassung verwendeten Meßwerte (ausgefüllte Symbole) liegen definitionsgemäß auf der durchgezogenen theoretischen Kurve $Ra_c(Rm)$, und die übrigen Meßwerte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen von $\pm 10\%$ mit dem berechneten Verlauf überein. Da die Meßwerte auf logarithmischer Skala ungefähr äquidistant gewählt wurden, häufen sie sich bei kleinen magnetischen Rayleigh-Zahlen. Deshalb wurden dort nur wenige Meßpunkte eingezeichnet, und der Bereich sehr großer magnetischer Rayleigh-Zahlen, wo die Meßwerte weit auseinander

liegen, ist nicht dargestellt. Die größten magnetischen Rayleigh-Zahlen, die im Experiment erreicht wurden, lagen bei $R_m \approx 10^6$.

Wie für ein Kolloid nicht anders zu erwarten, sind die Fehler verhältnismäßig groß. Dennoch erweist sich die Interpretation von Ferrofluiden als einkomponentige und homogene Flüssigkeit mit der zusätzlichen Eigenschaft der Magnetisierbarkeit als tragfähig. Der magnetische Auftrieb kann bei optimaler Schichtdicke ein vielfaches (bis zu 1000-faches) des archimedischen Auftriebs erreichen, und infolgedessen die Flüssigkeitsschicht auch dann destabilisieren, wenn sie von oben beheizt wird, also eine stabile Dichteverteilung besitzt.

7.2 Form und Amplitude der Konvektion

Ohne äußeres Magnetfeld unterscheidet sich die thermische Konvektion in Ferrofluiden nicht von der Konvektion in nichtmagnetischen Flüssigkeiten. Die stabile Konvektionsform bilden parallele Konvektionsrollen, deren Richtung und Phase in unendlich ausgedehnten Systemen nicht festgelegt ist. An den Rändern eines realistischen endlichen Systems wird die Homogenität bezüglich Translation und Rotation unterbrochen. Die Ränder geben somit die lokale Richtung und eventuell auch die Phase der Konvektionsrollen vor. Je nach Art der lateralen Randbedingungen orientiert sich der Wellenvektor senkrecht oder, wie in unserem Fall, parallel zur Gefäßwand an. Bei einer zylindrischen Form des Flüssigkeitsbehälters ergeben sich deshalb notwendigerweise Defekte im Konvektionsmuster, weil der Wellenvektor keine global einheitliche Richtung annehmen kann. Wie schon in Abschnitt 2.2 bemerkt wurde, bieten Defekte den Vorteil eindeutiger Wellenlängenselektion und die optimale Wellenlänge stellt sich innerhalb der horizontalen thermischen Diffusionszeit ein. Als charakteristische horizontale Länge für die Relaxationszeit muß der Durchmesser eines defektfreien Bereiches angesehen werden. Da solche Bereiche im Vergleich zum Gefäßdurchmesser klein waren, konnte sich die optimale Wellenlänge in verhältnismäßig kurzer Zeit (einige Minuten) einstellen, was angesichts der begrenzten Stabilität von Ferrofluiden wichtig war. Allerdings wird die Genauigkeit der Wellenzahlmessungen damit etwa auf den reziproken Durchmesser der regelmäßigen Bereiche begrenzt.

In den Bildern 1a bis 1f auf Tafel II auf Seite 140 sind Konvektionsmuster in einer 2 mm dicken Ferrofluidschicht für verschiedene Temperatur-

differenzen und vertikale Feldstärken dargestellt. Es zeigt sich im Einklang mit den Berechnungen, daß die Wellenzahl $a=2\pi d/\lambda$ im Magnetfeld gegenüber dem feldfreien Zustand 1a generell zunimmt. Außerdem wird die mit der Wellenzahl zunehmende Tendenz wechselseitiger Durchdringung der unregelmäßig angeordneten Konvektionsrollen deutlich. In Bild 1f auf Tafel II findet Konvektion im wesentlichen in Form quadratischer Zellen statt.

Die entscheidende Größe für die Zunahme der Wellenzahl und den Übergang von Rollen zu quadratischen Zellen ist aber nicht das Magnetfeld, sondern der magnetische Auftrieb, der durch die magnetische Rayleigh-Zahl R_m gegeben ist. Um die gemessenen Wellenzahlen mit den Berechnungen von Abschnitt 5.4 vergleichen zu können, wurden die magnetischen Rayleigh-Zahlen gemäß (7.4) und (7.5) aus den experimentellen Daten berechnet. Die Ergebnisse der Messungen sind zusammen mit der theoretischen Kurve (durchgezogene Linie) in Diagramm 7.4 dargestellt. Alle Wellenzahlmessungen wurden bei kleinen Konvektionsamplituden durchgeführt. Für den Bereich $\varepsilon < 1$ der Konvektionsamplitude konnte keine signifikante Abhängigkeit der Wellenzahl von ε festgestellt werden.

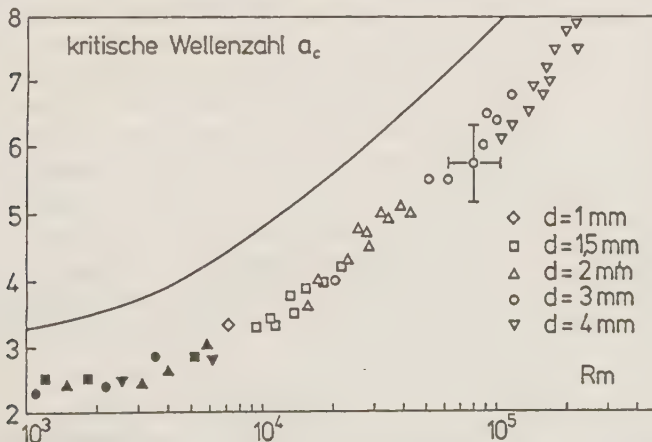


Diagramm 7.4 Kritische Wellenzahl als Funktion der magnetischen Rayleigh-Zahl. Ausgefüllte Symbole bedeuten $Ra > 0$ (von unten beheizt), offene Symbole bedeuten $Ra < 0$ (von oben beheizt). Die durchgezogene Kurve entspricht dem theoretischen Verlauf für $I=1$ und $J=1/2$ aus Diagramm 5.4.

Wie Abbildung 7.4 zeigt, folgen die Meßpunkte dem theoretischen Verlauf qualitativ, liegen aber systematisch darunter. Es wird vermutet, daß

die Diskrepanz eine Folge der unterschiedlichen thermischen Randbedingungen ist, die zum Experiment bzw. zu den Berechnungen verwendet wurden. Im Experiment betrug das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten von Ferrofluid und Glasplatte $k^{(ln)}/k^{(ex)}=0,2$, während zur Berechnung der kritischen Wellenzahl $k^{(ln)}/k^{(ex)}=0$ angenommen wurde. Eine Stichprobenrechnung bei $R_m=0$ mit den korrekten thermischen Randbedingungen liefert in guter Übereinstimmung mit den Messungen den kritischen Wert der Wellenzahl $a_c=2,6$, wodurch unsere Vermutung gestützt wird. Da es für die Interpretation und die Anwendungen mehr auf den qualitativen Aspekt der Wellenzahlverschiebung ankommt, der korrekt beschrieben wird, verzichten wir auf eine weitergehende numerische Analyse. Welche Auswirkungen die Verschiebung der kritischen Wellenzahl mit R_m auf die Stabilität des Konvektionsmusters bei endlicher Amplitude hat, wird in Abschnitt 7.3 untersucht werden.

Anhand von Abbildung 7.4 wird auch die Bedeutung der Konkurrenz zwischen archimedischen und magnetischen Kräften für die Zunahme der kritischen Wellenzahl sichtbar, denn der wesentliche Teil des Anstiegs, hier bis zu $a_c \approx 8$, liegt im Bereich negativer archimedischer Rayleigh-Zahlen (offene Symbole). Wenn beide Auftriebskräfte kooperieren, d.h., wenn die Ferrofluidschicht von unten beheizt wird (ausgefüllte Symbole), dann ist der Anstieg der kritischen Wellenzahl von $a_c \approx 2,5$ bis $a_c \approx 3,2$ kaum meßbar. Die kritische Wellenzahl für verschwindenden archimedischen Auftrieb (weder Konkurrenz noch Kooperation mit dem magnetischen Auftrieb) kann zwar im Schwerfeld der Erde nicht direkt gemessen werden, aber sie läßt sich als Grenzwert zwischen den beiden Ästen mit $R_a > 0$ bzw. $R_a < 0$ verhältnismäßig genau festlegen. Der gefundene Wert von $a_c \approx 3,2$ liegt wieder, verträglich mit der sonstigen Tendenz, unter dem für $R_a=0$ berechneten Wert von $a_c=3,8$.

Die bisherigen Ergebnisse waren auf vertikales Magnetfeld beschränkt. In einer zylindrischen Konvektionskammer und in einem vertikalen Magnetfeld gibt es keine Vorzugsrichtung für den Wellenvektor. Deshalb eignet sich die zylindersymmetrische Anordnung auch zum Nachweis der orientierenden Wirkung eines horizontalen Magnetfeldes. Ohne die lateralen Randbedingungen würde jedes beliebig kleine horizontale Magnetfeld ausreichen, um die Achsen der Konvektionsrollen in die Feldrichtung zu drehen, weil nur dann die archimedische Rayleigh-Zahl ihr Minimum annimmt (vgl. (5.23)). Um die Konvektionsrollen auch dort mit dem Feld aus-

zurichten, wo der konkurrierende Einfluß der Zylinderwand Rollen senkrecht zum Feld begünstigt muß aber ein endlich großes Magnetfeld angelegt werden. Für unsere Behälterabmessungen war in der Regel eine horizontale Feldstärke von weniger als $6 \cdot 10^3 \text{ A/m}$ ausreichend. Die horizontale Feldstärke konnte aber das Auftreten von Defekten nicht vollständig unterdrücken, wenn gleichzeitig ein vertikales Magnetfeld angelegt wurde. Die Dynamik solcher Defekte ist Gegenstand von Kapitel 7.4.

Die Zunahme der kritischen Wellenzahl mit der magnetischen Rayleigh-Zahl und die Orientierung des Wellenvektors sind Konsequenzen der Veränderung des lokalen Magnetfeldes durch die Konvektionsströmung. Beide Eigenschaften der Konvektionsform werden an der Instabilitätsschwelle festgelegt, wo die Amplitude ϵ der Konvektion gegen Null geht. Deshalb waren die linearen Beiträge der Feldstörungen zu ihrer quantitativen Beschreibung ausreichend. In linearer Näherung wird zwar das lokale Magnetfeld und damit die lokale Magnetisierung gegenüber dem statischen Zustand verändert, aber der mittlere Feldgradient, der das antreibende Kraftfeld liefert, bleibt erhalten. Mit anwachsender Amplitude ϵ müssen jedoch auch quadratische Beiträge der Feldstörungen berücksichtigt werden, die sich auf den mittleren Feldgradienten auswirken und die Amplitude begrenzen. Den begrenzenden Einfluß nichtlinearer Beiträge werden wir im folgenden anhand des direkt meßbaren Wärmestroms zeigen, der über die Beziehung (5.34) mit der Amplitude ϵ verknüpft ist.

Aufgrund der Modulation des Feldgradienten in horizontaler Richtung tritt Konvektion vorzugsweise in Form quadratischer Zellen auf, und die Verkleinerung seines Mittelwertes sorgt dafür, daß der Wärmestrom unter Beteiligung magnetischer Auftriebskräfte weniger steil mit der Rayleigh-Zahl ansteigt als bei archimedischen Auftriebskräften. In Abschnitt 5.5 wurde die Zunahme der Nußelt-Zahl mit der archimedischen Rayleigh-Zahl für konstante magnetische Rayleigh-Zahl berechnet. Vom experimentellen Standpunkt aus gesehen ist es jedoch bequemer, die magnetische Rayleigh-Zahl zu verändern und die archimedische konstant zu lassen, indem man die Feldstärke bei konstanter Temperaturdifferenz variiert. Die partiellen Ableitungen der Nußelt-Zahl nach Ra bzw. Rm sind durch die Beziehung

$$\left(\frac{\partial Nu}{\partial Rm}\right)_{Ra} = - \left(\frac{\partial Ra}{\partial Rm}\right)_{Nu} \cdot \left(\frac{\partial Nu}{\partial Ra}\right)_{Rm} \quad (7.6)$$

miteinander verknüpft. Weil die Ableitung der archimedischen Rayleigh-Zahl nach der magnetischen Rayleigh-Zahl an der Instabilitätsschwelle

$Nu=1$ ungefähr den Wert -1 annimmt (vgl. Diagramm 5.5), unterscheiden sich die beiden Ableitungen $\partial Nu/\partial R_m$ und $\partial Nu/\partial Ra$ nicht sehr stark. Der exakte theoretische Verlauf von $\partial Nu/\partial R_m$ ist in Diagramm 7.5 zusammen mit den Meßergebnissen dargestellt. Innerhalb der Fehlergrenzen von $\pm 30\%$ stimmen die gemessenen Anfangssteigungen mit der berechneten Kurve überein, und sie bestätigen damit die starke Abnahme der Anfangssteigung im experimentell zugänglichen Bereich über mehr als eine Größenordnung. Eine Lokalisierung des Übergangs von Konvektionsrollen zu Quadraten, der sich in Form eines leichten Abknickens des Kurvenzuges äußern müßte, ist wegen der großen Ungenauigkeiten nicht möglich.

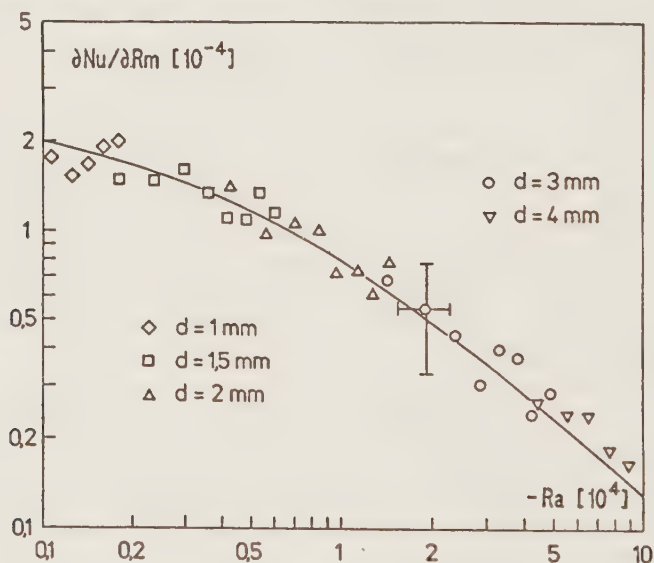


Diagramm 7.5 Anstieg des Wärmestroms mit der magnetischen Rayleigh-Zahl als Funktion der archimedischen Rayleigh-Zahl. Die durchgezogene Kurve entspricht dem mit den Gleichungen (5.51) und (7.6) umgerechneten theoretischen Verlauf für $I=1$ und $J=0$ aus Diagramm 5.11.

Der konvektive Anstieg des Wärmestroms durch die Flüssigkeit mit dem Magnetfeld könnte auch technische Bedeutung gewinnen, weil die äußere Feldstärke einfach und schnell einstellbar ist. Für eine grobe Abschätzung der Änderung des Wärmestroms bzw. der effektiven Wärmeleitfähigkeit k_{eff} bei konstanter Temperaturdifferenz verwenden wir die im Bereich

großer Rayleigh-Zahlen gültigen Näherungen (vgl. Diagramme 5.5 und 5.11):

$$\left(\frac{\partial Ra}{\partial Rm}\right)_{Nu=1} \approx -1 \quad \text{und} \quad Ra^{(2)} \approx Rm.$$

Damit ergibt sich aus (5.51) und (7.6)

$$\left(\frac{\partial Nu}{\partial Rm}\right)_{Ra} \approx \frac{1}{Rm}, \quad (7.7)$$

und wenn man berücksichtigt, daß die magnetische Rayleigh-Zahl Rm proportional zum Quadrat der Feldstärke H und die NuBelt-Zahl Nu gleich dem Verhältnis von effektiver Wärmeleitfähigkeit k_{eff} zur Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit ist, so erhält man für den Anstieg der effektiven Wärmeleitfähigkeit k_{eff} an der Instabilitätsschwelle

$$\frac{1}{k} dk_{eff} \approx \frac{2}{H} dH. \quad (7.8)$$

Bei konstanter Temperaturdifferenz steigt der effektive Wärmestrom doppelt so schnell an wie das reduzierte Magnetfeld.

7.3 Strukturelle Instabilitäten

Die kritischen Wellenzahlen der Konvektion wurden in Abschnitt 5.4 für infinitesimale Amplitude berechnet, aber wie die Messungen zeigen, gelten die berechneten Werte auch für endlich große Amplituden. In erster Näherung hängt die Wellenzahl der Konvektion nur von der magnetischen Rayleigh-Zahl Rm ab. Eine Änderung der magnetischen Rayleigh-Zahl, z.B. durch Vergrößern des vertikalen Magnetfeldes, besitzt zwei Auswirkungen auf eine etablierte Konvektionsströmung: Sowohl die Amplitude als auch die Wellenzahl wird vergrößert. Für beide Effekte wurden im vorhergehenden Abschnitt die quantitativen Ergebnisse zusammengestellt. Während dort aber nur die quasistationären Endzustände ausgewertet wurden, stehen im vorliegenden Abschnitt die Übergangsmoden und deren Dynamik im Vordergrund.

Die magnetische Rayleigh-Zahl zeichnet sich gegenüber der archimedischen Rayleigh-Zahl unter anderem dadurch aus, daß sie, gemessen in

Einheiten der thermischen Diffusionszeit d^2/α , innerhalb sehr kurzer Zeiten verändert werden kann. Eine ausgebildete Konvektionsströmung kann sich nicht vergleichbar schnell an die veränderten Verhältnisse anpassen.

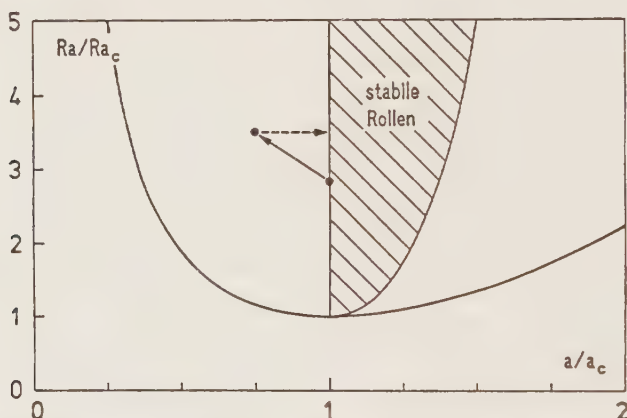


Diagramm 7.6 Neutrale Kurve für die einsetzende thermische Konvektion und Stabilitätsbereich von Konvektionsrollen (schraffiert). Die eingezeichneten Pfeile deuten die Zustandsänderungen an, wenn die magnetische Rayleigh-Zahl plötzlich vergrößert wird (siehe Text).

Die Situation nach plötzlichem Vergrößern von R_m läßt sich anhand des Stabilitätsdiagramms 7.6 veranschaulichen, das den neutralen Wert der archimedischen Rayleigh-Zahl als Funktion der Wellenzahl und den Stabilitätsbereich von Konvektionsrollen wie in Diagramm 2.6 wiedergibt. Sowohl die Wellenzahl als auch die archimedische Rayleigh-Zahl wurden auf ihren kritischen Wert normiert. Für Ferrofluide sind die kritischen Werte Ra_c und a_c nicht konstant, sondern von der magnetischen Rayleigh-Zahl R_m abhängig (siehe Diagramme 7.3 und 7.4). Ra_c nimmt mit R_m ab, während a_c mit R_m anwächst. Bei einer augenblicklichen Vergrößerung der magnetischen Rayleigh-Zahl verschiebt sich der bestehende Zustand, gekennzeichnet durch die gleichbleibende archimedische Rayleigh-Zahl und die Wellenzahl, in den reduzierten Koordinaten von Diagramm 7.6 längs des eingezeichneten Pfeils nach links oben. Dabei verläßt der Zustand den schraffiert gezeichneten Bereich stabiler Konvektionsrollen. Der Mechanismus des anschließenden Übergangs in einen stabilen Zustand hängt wesentlich von der Konvektionsform des Ausgangszustandes ab. In sehr defektreichen Strukturen gelingt rasche und stetige Anpassung durch Gleiten und

Klettern von "Versetzungen" über die relativ kurzen Distanzen zwischen den Defekten (siehe Abschnitt 7.2). Der Mechanismus versagt aber in defektfreien Strukturen, denn bevor sich Versetzungen vom Rand her ihren Weg durch die gesamte Konvektionskammer bahnen und die Wellenzahl stetig an die veränderten Bedingungen anpassen können, werden andere Moden instabil, die einen unstetigen und damit schnelleren Übergang auf eine stabile Wellenzahl ermöglichen. In homogenen Strukturen sind die anwachsenden Störungen durch eine Wellenlänge λ_s charakterisiert. Es wird sich zeigen, daß das Verhältnis der Wellenlängen des Anfangszustandes und der instabil werdenden Moden im wesentlichen von der Konvektionsamplitude bestimmt wird. Als Maß für die Amplitude ϵ verwenden wir wieder die direkt zugängliche Nußelt-Zahl Nu . Die Beziehung zwischen Nu und ϵ ist durch $(Nu-1)=\epsilon^2$ gegeben (vgl. Abschnitt 5.5).

Das experimentelle Vorgehen gliedert sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt wurde mit Hilfe eines horizontalen Magnetfeldes von $6 \cdot 10^3$ A/m ein weitgehend defektfreies Konvektionsmuster in Form von parallel zum horizontalen Feld ausgerichteten Konvektionsrollen erzeugt. Nachdem sich ein stabiler und stationärer Zustand eingestellt hatte, wurde, im zweiten Schritt, das horizontale Magnetfeld ausgeschaltet und gleichzeitig das vertikale Magnetfeld vergrößert. Die anschließende Entwicklung des Strömungsmusters zu größeren Wellenzahlen wurde in Abständen von etwa einer Sekunde fotografiert. Auf Tafel III (Seite 141) sind die charakteristischen Ergebnisse zusammengefaßt. Es ist jeweils der Anfangszustand (parallele Rollen), der Endzustand (Quadrate mit Defekten) und eine typische Übergangsmode dargestellt, die wenige Sekunden nach dem Umstellen der Feldstärken aufgenommen wurde. Weil nach dem Ausschalten des horizontalen Feldes Defekte vom Rand her in das Innere der Konvektionskammer wandern, wurde nur ein zentraler Ausschnitt der Konvektionskammer mit 30 mm Durchmesser abgebildet.

Im Bereich kleiner Amplituden ($Nu-1 < 0,5$) beginnen sich die Konvektionsrollen nach dem Umstellen der Feldstärke wellenförmig zu verbiegen (Bilder 1a bis 1c). Diese Instabilität kann als periodische Translation der Konvektionsrollen senkrecht zu deren Achsen interpretiert werden. Die Wellenlänge λ_s der periodischen Translation ist mehr als doppelt so groß wie die Wellenlänge λ der ursprünglichen Konvektionsrollen. Durch die Verbiegung nimmt die effektive Wellenzahl zu, und der Zustand nähert sich wieder dem stabilen Bereich (gestrichelter Pfeil in Diagramm 7.6). Sobald

die Verbiegung hinreichend weit fortgeschritten ist, brechen die Rollen auf und schließen sich zu zwei neuen Rollensystemen zusammen, die aufeinander senkrecht stehen und gegenüber dem Ausgangszustand um $+45^\circ$ bzw. -45° gedreht sind (Bild 1c). Im Verlauf der Umstrukturierung können leicht Defekte entstehen, weil auch der Wellenvektor des Anfangszustandes nicht überall konstant ist. Alle weiteren Wellenzahlkorrekturen erfolgen dann durch Versetzungsbewegungen.

Der Übergang besitzt große Ähnlichkeit mit der von Busse & Whitehead (1971) beschriebenen Zick-Zack-Instabilität, die in einer Silikonölschicht mit von außen aufgeprägten Konvektionsrollen beobachtet wird, wenn deren Wellenzahl unterhalb des Stabilitätsbereiches liegt. Im Gegensatz zu den Experimenten an Silikonöl findet in Ferrofluiden jedoch kein Übergang zu stabilen Konvektionsrollen, sondern zu quadratischen Zellen statt. Das entstehende Konvektionsmuster ist deshalb im Ferrofluid eindeutig festgelegt, während in nichtmagnetischen Flüssigkeiten zwei verschiedene Endzustände, entweder um $+45^\circ$ oder um -45° gegen den Anfangszustand gedreht, möglich sind.

Wenn wir die Amplitude der Konvektion vergrößern, dann läuft der Übergang zunächst nach dem gleichen Muster wie oben beschrieben ab. Allerdings wird die Wellenlänge λ_s der anwachsenden Störungen mit zunehmender Amplitude kleiner. Bei $Nu-1 \approx 0,5$ beträgt λ_s nur noch das 1,5-fache von λ (siehe Serie 2a bis 2c), und bei $Nu-1 \approx 1$ hat λ_s die Wellenlänge λ der Konvektion erreicht (Serie 3a bis 3c).

Mit weiter abnehmendem Verhältnis λ_s/λ müssen die Konvektionsrollen immer stärker gekrümmt werden, um den Übergang via Zick-Zack-Instabilität zu ermöglichen. Anscheinend ist für $\lambda_s < \lambda$ die direkte Bildung eines neuen Rollensystems dagegen günstiger, denn wie in den Experimenten von Busse & Whitehead (1971) an Silikonöl beobachten wir in Ferrofluiden bei $(Nu-1) > 1$ die Entstehung eines neuen Rollensystems mit $\lambda_s < \lambda$, senkrecht zu den vorhandenen Konvektionsrollen (Serie 4a bis 4c). Der stabilisierende Einfluß, den die bestehenden Konvektionsrollen mit der von ihnen in der Schicht hervorgerufenen Temperaturverteilung ausüben, beeinträchtigt Rollen, die senkrecht zu ihnen orientiert sind, am wenigsten. In Silikonöl wird der Ausgangszustand von den entstandenen Querrollen abgelöst, deren Wellenlänge im stabilen Bereich liegt. Der entsprechende Übergang wurde von Busse & Whitehead als Cross-Roll-Instabilität bezeichnet. Die Cross-Roll-Instabilität ermöglicht aber keinen direkten Übergang zu

quadratischen Konvektionszellen, die den stabilen Zustand in Ferrofluiden bilden. Deshalb ist in Ferrofluiden eine weitere Instabilität des Zwischenzustandes nötig.

Bei den meisten beobachteten Übergängen entstanden die Querrollen mit zahlreichen Defekten mit einem anschließenden unregelmäßigen Anpassungsprozeß. Eine Ausnahme ist in der Sequenz 2a bis 2f auf Tafel II dargestellt. Die noch relativ schwach ausgeprägten Querrollen in 2b werden von einer Zick-Zack-Instabilität der noch bestehenden Ausgangsrollen abgelöst, die auf zwei gekreuzte, um $\pm 45^\circ$ gedrehte Rollensysteme mit kleinerer Wellenlänge führt (2d und 2e). Die Zick-Zack-Instabilität konnte den Zustand aber noch nicht in den stabilen Bereich befördern, denn die entstandenen Konvektionsrollen erleiden eine zweite Zick-Zack-Instabilität (2f). Den Endzustand bilden schließlich zwei gekreuzte Rollensysteme, die senkrecht bzw. parallel zum Anfangszustand 2a ausgerichtet sind.

Trotz der Nachteile, die Querrollen für den Übergang zu quadratischen Zellen besitzen, treten sie mit zunehmender Amplitude immer deutlicher in Erscheinung. In der Serie 5a bis 5c ist der Übergang nach dem Umschalten des Feldes bei einer Amplitude $(Nu-1) > 1,5$ abgebildet. Die Wellenlänge λ_q der Querrollen in Bild 5b ist nur noch etwa halb so groß wie λ . Wegen der verhältnismäßig kleinen Wellenlänge λ_q liegt die Vermutung nahe, daß es sich in 5b um bimodale Konvektion handelt, das heißt, daß die Querrollen auf die Randschicht beschränkt sind (siehe Abschnitt 2.2). Bei großer Konvektionsamplitude konzentriert sich der Temperaturgradient und der Gradient des inneren Magnetfeldes nämlich in der Randschicht (siehe Diagramm 5.10), weshalb dort der magnetische Auftrieb im Vergleich zum Inneren der Schicht sehr groß wird. Das optische Abbild läßt aber keine eindeutige Unterscheidung zwischen Cross-Roll-Instabilität und bimodaler Konvektion zu, weil beide Konvektionsformen stetig ineinander übergehen (Frick et al. 1983). Der weitere Verlauf des Übergangs ist wieder durch Defektwanderung gekennzeichnet, wobei die Wellenlänge λ ab und die Wellenlänge λ_q der Querrollen zunimmt, bis sich das Konvektionsmuster 5c eingestellt hat.

Mit den Messungen des vorliegenden Abschnittes sollte gezeigt werden, daß "strukturelle Instabilitäten" in Ferrofluiden allein durch plötzliches Ändern von Richtung und Betrag des äußeren Magnetfeldes erzeugt werden können. Die beobachteten Übergänge ähneln den bekannten Instabilitäten in unmagnetischen Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl. Zur Parametrisie-

rung der Ergebnisse wählten wir die Konvektionsamplitude. Vermutlich ist die Amplitude aber nicht die einzige ausschlaggebende Größe für die Art des Übergangs. Ein genaues Vermessen der Stabilitätsbereiche als Funktion z.B. der Rayleigh-Zahlen Ra und Rm setzt jedoch ein wesentlich größeres Aspektverhältnis voraus.

7.4 Phasenturbulenz

In homogenen Flüssigkeiten mit großer Prandtl-Zahl ist die thermische Konvektion bis zu relativ großen Amplituden stationär. Trotz des großen Wertes $Pr \approx 50$ der Prandtl-Zahl unseres Ferrofluids konnte aber auch nach einem Vielfachen der horizontalen thermischen Diffusionszeit $l^2/\chi \approx 3h$ kein Relaxieren des Konvektionsmusters in einen stationären Zustand beobachtet werden, wenn ein äußeres Magnetfeld angelegt wurde. Die Ursachen dafür sind vermutlich in Veränderungen der lokalen Teilchenkonzentration zu suchen, die sich in Zeiträumen von einigen Tagen bemerkbar machen. Quantitativ wird der Einfluß von Konzentrationsverschiebungen auf die Konvektionsströmung mit dem Separationsverhältnis Y beschrieben, dessen dominierende magnetische Komponente Y_m durch

$$Y_m = - \frac{H}{H_g}$$

gegeben ist (vgl. Abschnitt 3.2). Ein negativer Wert des Separationsverhältnisses besagt, daß Konzentrationsänderungen in Bezug auf die Stabilität der Fluidschicht den entgegengesetzten Effekt wie Temperaturänderungen besitzen. Weil Temperaturstörungen im Ferrofluid generell einen destabilisierenden magnetischen Auftrieb erzeugen, sind die sie begleitenden Konzentrationsverschiebungen also stabilisierend. Ihre Wirkung besteht jedoch nicht einfach darin, die Konvektionsamplitude zu verkleinern, sondern, infolge nichtlinearer Kopplung an das Geschwindigkeitsfeld, in komplizierten und zeitabhängigen Bewegungsabläufen (Phasenturbulenz).

Es ist schwierig, die Bewegungsformen zu klassifizieren, wenn das Konvektionsmuster unregelmäßig ist wie bei quadratischen Zellen mit Defekten. Deshalb wurde den Konvektionsrollen mit Hilfe eines horizontalen Magnetfeldes eine Vorzugsrichtung aufgeprägt. Bei strikt ausgerichteten Konvektionsrollen gibt es nur noch eventuell vom Ort abhängende Transla-

tionsbewegungen der Rollen parallel zum Wellenvektor. Solche Phasenbewegungen eindimensionaler Konvektionsformen wurden von Lowe et al. (1986) mit nematischen Flüssigkeiten bei sehr großem Aspektverhältnis untersucht. In unserer Meßanordnung wird die Dynamik jedoch von Defekten beherrscht, denn das Aspektverhältnis ist nicht groß genug, um Randeinflüsse vernachlässigen zu können. Als elementaren Defekt des quasi-eindimensionalen Konvektionsmusters betrachten wir eine "Versetzung", bestehend aus einem zusätzlichen Rollenpaar, dessen Ausdehnung begrenzt ist (siehe Bild 7.7). Die Bewegungen solcher Versetzungen lassen sich in ihre Komponenten parallel zu den Rollenachsen (Klettern) und senkrecht zu den Rollenachsen (Gleiten) zerlegen.

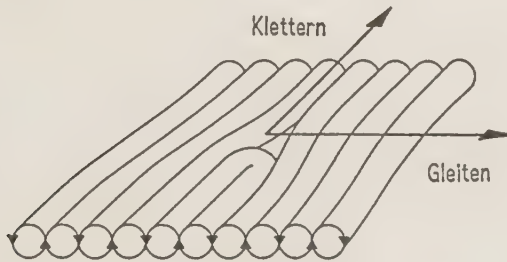


Bild 7.7 Skizze eines elementaren Defektes (Versetzung) in einem System von ausgerichteten Konvektionsrollen.

Bei vorherrschendem horizontalem Magnetfeld entstehen Versetzungen vorzugsweise an den Rändern des Konvektionsgebietes, wo die orientierenden Wirkungen der Begrenzung und des Magnetfeldes miteinander konkurrieren. Die allmähliche Änderung der Teilchenkonzentration durch die lokalen Feldgradienten in der Umgebung der Versetzung modifiziert die Kräfteverteilung offenbar so, daß die Versetzungen langsam vom Rand wegwandern. In der Serie 3a bis 3c auf Tafel II ist die Vernichtung eines Paares von Versetzungen zu sehen, das sich aus entgegengesetzten Richtungen aufeinander zu bewegt. Die Klettergeschwindigkeit beträgt in diesem Beispiel etwa 10^{-5} m/s. Nach dem Ausheilen solcher Defekte entstehen in der Regel am Rand neue Versetzungen, die wieder langsam in das Innere der Konvektionskammer wandern.

Der Mechanismus vom Rand her kletternder Versetzungen existiert auch bei vorherrschendem vertikalen Magnetfeld. Aber mit der spontanen Erzeugung von Versetzungspaaren, die sich durch Versetzungsgleiten rasch voneinander entfernen, kommt ein weiterer Mechanismus dazu. Da die Gleitbewegung mit ungefähr 10^{-2} m/s um drei Größenordnungen schneller erfolgt als die Kletterbewegung, hat das Klettern von Versetzungen praktisch keinen Einfluß auf die Dynamik des Konvektionsmusters. Die Abbildungen 4a bis 4c auf Tafel II zeigen Momentaufnahmen der Gleitbewegung einer Versetzung. Als Folge der Versetzungswanderung verschieben sich die Bereiche, die durch die Gleitlinie getrennt sind, gegeneinander in Richtung der eingezeichneten Pfeile. Die Periode der Relativbewegung von 10 s bis 100 s ist durch die Zeit gegeben, die eine Versetzung zum Durchlaufen der Konvektionskammer benötigt.

Zur Erklärung des beschriebenen Phänomens folgen wir der Argumentation von Walden et al. (1985), die in einem Alkohol-Wasser-Gemisch ähnliche Translationsbewegungen beobachtet hatten. Durch die thermische Konvektion wird die Temperatur in der Flüssigkeitsschicht in horizontaler Richtung mit der Wellenlänge λ der Konvektionsrollen moduliert. Die Zeit, innerhalb der sich die Temperaturverteilung einstellt, ist durch die vertikale thermische Diffusionszeit d^2/κ gegeben. Mit der längeren Anpassungszeit d^2/D (D bezeichnet die Teilchendiffusivität) verändert sich auch die Konzentration der Magnetitteilchen. Da das magnetische Separationsverhältnis Y_m negativ ist, folgt, daß die thermisch induzierte Modulation der Magnetisierung gegenüber der von der Teilchenkonzentration verursachten Modulation um 180° phasenverschoben ist, so daß die Konzentrationsverteilung den magnetischen Auftrieb verkleinert. Der Zustand stationärer Konvektionsrollen ist jedoch instabil, denn eine kleine Phasenverschiebung schwächt die stabilisierende Wirkung der Konzentrationsverteilung mit der Folge anwachsender Amplitude des verschobenen Rollensystems. Da sich die Teilchenkonzentration nicht vergleichbar schnell an die veränderte Temperaturverteilung anpassen kann, wächst die Phasenverschiebung auf einen endlichen Wert an, um den die Temperaturwelle der Konzentrationswelle schließlich vorseilt.

Die Bewegungsrichtung der fortschreitenden Konvektionsrollen hängt von der anfänglichen Störung des labilen Gleichgewichtes der gegenphasigen Dichte- und Temperaturwelle ab. Beide Bewegungsrichtungen transversal zu den Rollachsen sind möglich. Da mit der Translationsbewegung der Dichtewelle ein Massetransport verbunden ist, unterliegt die globale Bewegung in endlichen Behältern der Einschränkung, daß die zugehörigen Stromlinien geschlossen sein müssen. Deshalb beobachten wir verschiedene Bereiche, die keilförmig ineinandergreifen, mit entgegengesetzter Bewegungsrichtung der Konvektionsrollen (vgl. Bild 2.7). Ähnlich wie bei der plastischen Verformung von Festkörpern ist Versetzungsgleiten offenbar der günstigste Mechanismus, der die Relativbewegung zweier defektfreier Bereiche ermöglicht.

Die Entstehung vertikaler Strömungswirbel bildet einen weiteren Schritt auf dem Weg zur Turbulenz in der Flüssigkeitsschicht. Wie für den magnetischen Auftrieb läßt sich in Ferrofluiden auch die treibende Kraft für die vertikalen Strömungswirbel mit dem äußeren Magnetfeld kontrollieren, denn das Separationsverhältnis Y_m , das für die Entmischung verantwortlich ist, hängt von der Feldstärke ab. Um die Stabilitätsgrenzen für großräumige Strömungsmoden z.B. als Funktion des Aspektverhältnisses bestimmen zu können, sind allerdings systematische Langzeitmessungen notwendig, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt wurden, weil die Homogenität des Ferrofluids bei Langzeitmessungen nicht erhalten bleibt. Die Erweiterung der Bewegungsgleichungen auf inhomogene Teilchenkonzentrationen setzt ein besseres Verständnis der Transportphänomene im Ferrofluid voraus.

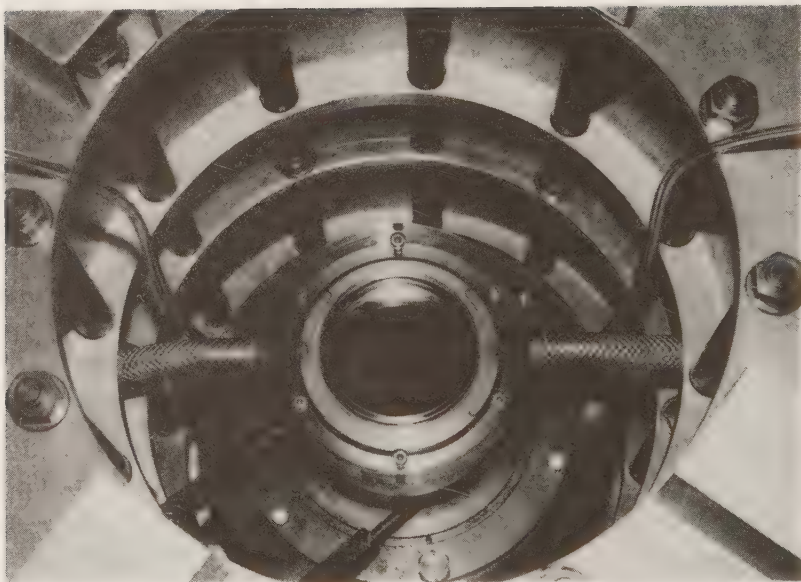


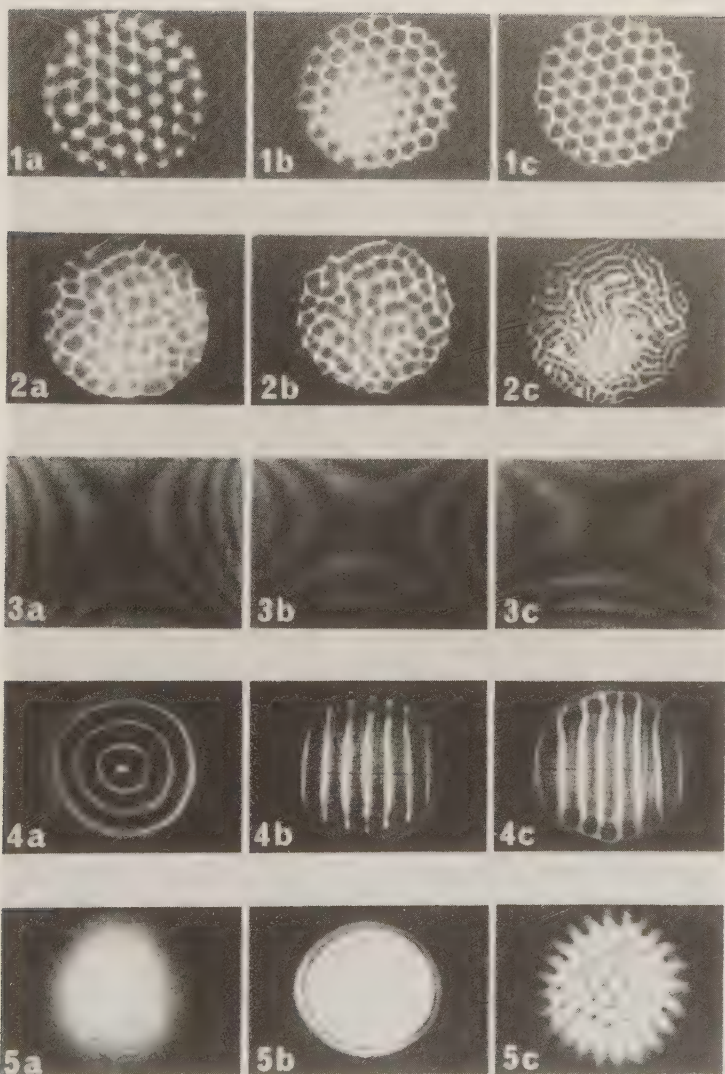
Bild 7.8 Ansicht der Konvektionskammer im Zentrum der Spulenanordnung, mit der die Strömungsmuster auf den nachfolgenden Tafeln aufgenommen wurden (außer 1 und 2 auf Tafel I). Das Abbildungssystem wurde für die Aufnahme entfernt.

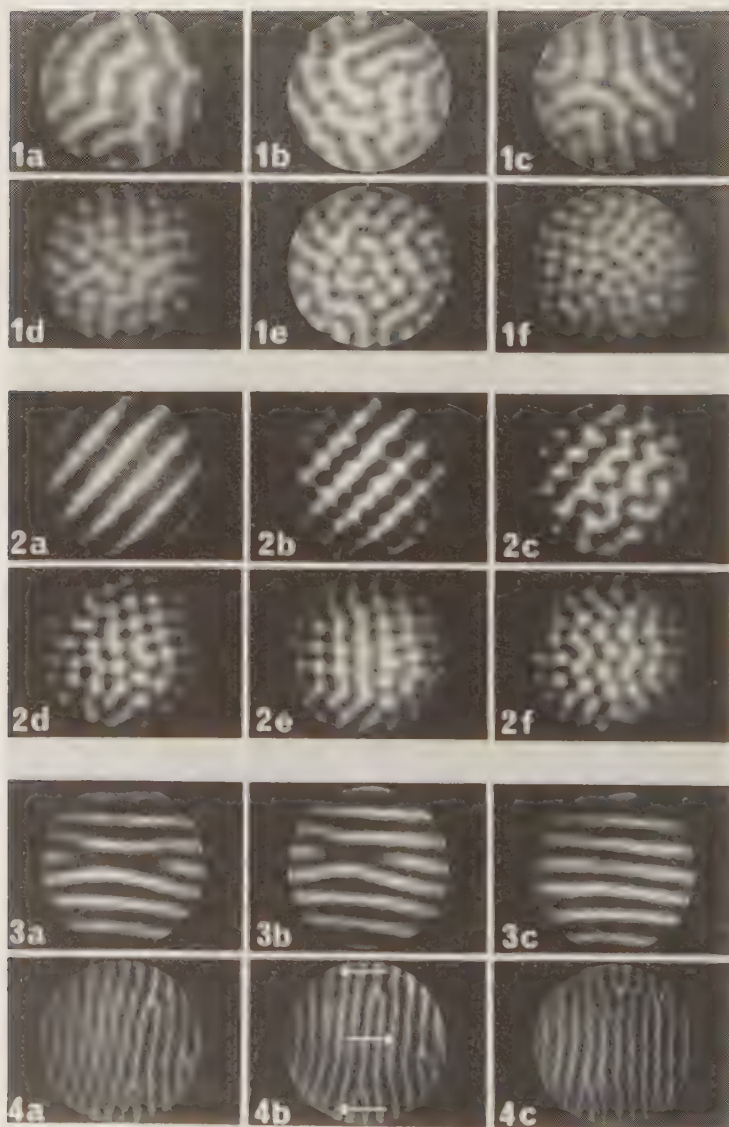
Tafel I Konvektion mit freier Oberfläche (1 und 2), Interferogramme der Spiegelkrümmung für zunehmenden Wärmestrom (3) und Konvektion bei fester Oberfläche (4 und 5). Der sichtbare Durchmesser für die Bilderserien 1 und 2 beträgt 72 mm bei einem Gesamtdurchmesser der Fluidschicht von 100 mm. Der Kammerdurchmesser bei den Serien 3 bis 5 betrug 63 mm. In 3 ist ein zentraler Bereich mit ca. 30 mm Durchmesser abgebildet und in 4 und 5 der Gesamtdurchmesser.

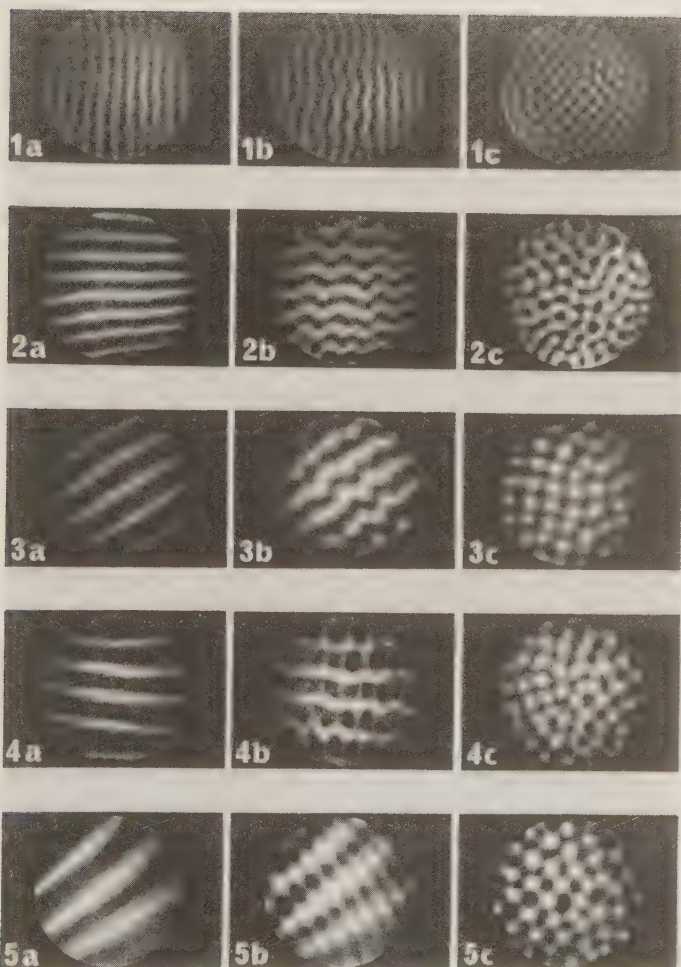
Tafel II Konvektionsmuster für zunehmende vertikale Feldstärke (1), strukturelle Instabilität nach plötzlichem Verändern der äußeren Feldstärke (2), Versetzungsklettern (3) und Versetzungsgleiten (4). Es ist jeweils ein zentraler Bereich der Schicht mit 30 mm Durchmesser abgebildet. Der Gesamtdurchmesser betrug 63 mm.

Tafel III Zick-Zack-Instabilität (1 bis 3), Cross-Roll-Instabilität (4) und bimodale Konvektion (5). Es ist jeweils ein zentraler Bereich der Flüssigkeitsschicht mit 30 mm Durchmesser abgebildet. Der Gesamtdurchmesser betrug 63 mm.

Ausführliche Erläuterungen zu den Tafeln I bis III befinden sich im Text.







8. Zusammenfassung

Thermische Konvektion in einer ebenen, von unten beheizten Flüssigkeitsschicht ist das einfachste Beispiel für eine hydrodynamische Instabilität und für den Übergang zur Turbulenz. In der vorliegenden Arbeit wurde die thermische Konvektion in stabilen Suspensionen magnetischer Einberreichsteilchen, die man Ferrofluide nennt, untersucht.

Die Gegenwart des Schwerfeldes der Erde schränkt den Parameterbereich, in dem Magnetfelder die Konvektionsströmung in Ferrofluiden beeinflussen können, stark ein. Mit Hilfe von Ähnlichkeitsüberlegungen wurden die typischen Größenverhältnisse bestimmt, für die Magnetokonvektion auftreten kann. Es zeigt sich, daß bei gleichzeitig geforderter Homogenität nur die magnetischen Wechselwirkungskräfte stark genug sind um mit der Schwerkraft konkurrieren zu können. Bei passend gewählter Schichtdicke kann der magnetische Auftrieb, der von der Dipolwechselwirkung verursacht wird, sehr viel größer als der archimedische Auftrieb sein.

Die Ähnlichkeitsüberlegungen wurden von quantitativen Berechnungen der Stabilitätsgrenzen, der Strömungsformen und des Wärmetransportes für die Konvektion in Ferrofluiden ergänzt. Geordnet nach Potenzen der Strömungsamplitude lassen sich die Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

- In der ruhenden Flüssigkeitsschicht (nullte Ordnung) bildet sich bei vertikalem äußeren Magnetfeld parallel zum Temperaturgradienten ein homogener vertikaler Gradient des inneren Magnetfeldes aus. Da der innere Feldgradient generell destabilisierend wirkt, kann eine ruhende Flüssigkeitsschicht instabil werden, auch wenn sie von oben beheizt wird.
- Die einsetzende Konvektionsströmung (erste Ordnung) moduliert die innere Feldstärke durch entmagnetisierende Felder, die ihrer Ursache (der Konvektionsströmung) entgegengerichtet sind und die sich deshalb stabilisierend auswirken. Die Konvektionsrollen orientieren sich parallel zur Horizontalkomponente des äußeren Feldes, und ihre Wellenlänge nimmt mit zunehmender Vertikalkomponente des Magnetfeldes ab, weil damit die stabilisierenden entmagnetisierenden Felder kleiner werden.
- Konvektionsströmung mit endlicher Amplitude (zweite Ordnung) verkleinert den vertikalen Feldgradienten in der Schichtmitte. Deshalb steigt der konvektive Wärmestrom durch die Ferrofluidschicht unter Beteiligung magnetischer Wechselwirkungskräfte weniger steil mit der Temperaturdifferenz an als bei Konvektion mit äußeren Kräften. Als Folge der Modulation des Feldgradienten in den Randschichten des Ferrofluids tritt Konvektion in Form quadratischer Zellen auf.

Die genannten Auswirkungen des Magnetfeldes treten besonders deutlich in Erscheinung, wenn Schwerkraft und magnetische Kräfte konkurrieren, d.h. wenn die Flüssigkeitsschicht von oben beheizt wird. Mit Hilfe der ebenfalls berechneten lokalen Feldverteilung im Innern des Ferrofluids wurden die magnetischen Kräfte veranschaulicht.

Um die beschriebenen Phänomene messen zu können, mußte ein Verfahren entwickelt werden, das die Beobachtung der Strömung in den undurchsichtigen Ferrofluiden ermöglicht. Wir verwendeten die Temperaturabhängigkeit der optischen Dicke einer das Ferrofluid bedeckenden Platte aus Spezialglas zur Abbildung der Konvektionsströmung. Aufgrund der mit dem Wärmestrom zunehmenden Krümmung der Glasplatte konnte gleichzeitig die Einsatzschwelle der Konvektion und ihre Amplitude ohne die nivellierenden Beiträge der Konvektion an den lateralen Begrenzungen der Meßkammer bestimmt werden.

Im gesamten Bereich, in dem magnetische Kräfte Einfluß auf die Strömung besitzen, wurden die Stabilitätsgrenzen der ruhenden Flüssigkeitsschicht sowie die Amplitude und die Form der Konvektion als Funktion der Schichtdicke, der Temperaturdifferenz und des Betrages und der Richtung der äußeren Feldstärke bestimmt. Abgesehen von kleinen Abweichungen bei den Wellenzahlen stimmen die experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen, die oben zusammengefaßt wurden, überein und bestätigen damit die für die Berechnungen gemachten Annahmen: Ferrofluide verhalten sich wie magnetisierbare Flüssigkeiten; der Betrag und die Richtung des Wellenvektors der Konvektionsströmung kann mit dem äußeren Magnetfeld verändert werden.

In Ferrofluiden gibt es neben der thermischen Diffusionszeit zwei weitere Relaxationszeiten, die für die Änderung der Magnetisierung verantwortlich sind. Die erforderliche Zeit für Änderungen des lokalen Magnetfeldes ist sehr viel kleiner und die erforderliche Zeit für Änderungen der Teilchenkonzentration ist sehr viel größer als die thermische Diffusionszeit. Unter Ausnutzung der konkurrierenden Relaxationszeiten wurde die Stabilität von Konvektionsrollen untersucht. Die beobachteten Instabilitäten besitzen große Ähnlichkeit mit bekannten Instabilitäten in nichtmagnetischen Flüssigkeiten (Zick-Zack-, Cross-Roll-Instabilität und bimodale Konvektion) und in binären Mischungen (fortschreitende Wellen und vertikale Strömungswirbel). Der experimentelle Vorteil, den Ferrofluide für die Stabilitätsuntersuchung gegenüber nichtmagnetischen Flüssigkeiten bieten, besteht darin, daß die inneren Kräfte, die für Auftrieb und Entmischung verantwortlich sind, mit dem leicht kontrollierbaren äußeren Magnetfeld verändert werden können.

Literaturverzeichnis

- AHLERS, G. & BEHRINGER, R.P. 1978 Evolution of Turbulence from the Rayleigh-Bénard Instability. *Phys. Rev. Lett.* **40** (11), 712-716.
- AHLERS, G., CANNELL, D.S. & STEINBERG, V. 1985 Time Dependence of Flow Patterns near the convective Threshold in a Cylindrical Container. *Phys. Rev. Lett.* **54** (13), 1373-1376.
- BERKOVSKY, B.M. & BASHTOVOI, V. 1980 Instabilities of Magnetic Fluids Leading to a Rupture of Continuity. *IEEE - Trans. Magnetics* **MAG 16**, 288-297.
- BLUMS, E., PLAVINS, J. & CHUKHROV, A. 1983 High-Gradient Magnetic Separation of Magnetic Colloids and Suspensions. *J. Mag. Mag. Mat.* **39**, 147-151.
- BRENNER, H. & WEISSMAN, M.H. 1972 Rheology of a Dilute Suspension of Dipolar Spherical Particles in an External Field. II Effects of Rotary Brownian Motion. *J. Colloid and Interface Science* **41** (3).
- BUSSE, F.H. 1967a On the Stability of Two-Dimensional Convection in a Layer Heated from below. *J. Math. Phys.* **46**, 140-149.
- BUSSE, F.H. 1967b The Stability of Finite Amplitude Cellular Convection and its Relation to an Extremum Principle. *J. Fluid Mech.* **30** Pt 4, 625-649.
- BUSSE, F.H. 1972 The Oscillatory Instability of Convection Rolls in a Low Prandtl Number Fluid. *J. Fluid Mech.* **52**, 97-112.
- BUSSE, F.H. & CLEVER, R.M. 1979 Instabilities of Convection Rolls in a Fluid of Moderate Prandtl Number. *J. Fluid Mech.* **91**, 319-335.
- BUSSE, F.H. & WHITEHEAD, J.A. 1971 Instabilities of Convection Rolls in a High Prandtl Number Fluid. *J. Fluid Mech.* **47**, 305-320.
- BUSSE, F.H. & WHITEHEAD, J.A. 1974 Oscillatory and Collective Instabilities in Large Prandtl Number Convection. *J. Fluid Mech.* **66**, 67-79.
- CALLEN, H.B. 1960 *Thermodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, London.
- CHANTRELL, R.W., POPPLEWELL, J. & CHARLES, S.W. 1978 Measurements of Particle Size Distribution Parameters in Ferrofluids. *IEEE Trans. Magn.* **MAG 14** (5), 975-977.
- CHARLES, S.W. & POPPLEWELL, J. 1980 Ferromagnetic Liquids. In *Ferromagnetic Materials, Vol. 2*, pp. 509-559 (herausgeg. von Wohlfarth, E.P.) North Holland Publishing Company.
- CHU, B.T. 1959 Thermodynamics of Electrically Conducting Fluids. *Phys. Fluids* **2** (5), 473-484.

- CLEVER, R.M. & BUSSE, F.H. 1974 Transition to Time-Dependent Convection. *J. Fluid Mech.* **65**, 625-645.
- COWLEY, M.D. & ROSENSWEIG, R.E. 1967 The Interfacial Stability of a Ferromagnetic Fluid. *J. Fluid Mech.* **30** Pt. 4, 671-688.
- CROQUETTE, V., LE GAL, P. & POCHÉAU, A. 1986 Large-Scale Flow Characterisation in a Rayleigh-Bénard Convective Pattern. *Europhys. Lett.* **1** (8), 393-399.
- CROQUETTE, V. & POCHÉAU, A. 1984 Wavenumber Selection in Rayleigh-Bénard Convective Structure. In *Cellular Structures in Instabilities*, pp. 104-126 (herausgeg. von Wesfrel, J.E. & Zaleski, S.) Springer-Verlag, Berlin.
- DE GENNES, P.G. & PINCUS, P.A. 1970 Pair Correlations in a Ferromagnetic Colloid. *Phys. Kondens. Materie* **11**, 189-198.
- DUBOIS, M. 1982 Experimental Aspects of the Transition to Turbulence in Rayleigh-Bénard Convection. In *Stability of Thermodynamic Systems*, pp. 177-192 (herausgeg. von Casas-Vazquez, J. & Lebon, G.) Springer-Verlag, Berlin.
- ECKHAUS, W. 1965 *Studies in Non-Linear Stability Theory*. Springer-Verlag, New York.
- EINSTEIN, A. 1905 On the Movement of Small Particles suspended in a stationary Liquid Demanded by the Molecular Kinetic Theory of Heat. *Ann. d. Phys.* **17**, 549.
- FINLAYSON, B.A. 1970 Convective Instability of Ferromagnetic Fluids. *J. Fluid Mech.* **40** Pt 4, 753-767.
- FINLAYSON, B.A. 1972 *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, New York.
- FRICK, H., BUSSE, F.H. & CLEVER, R.M. 1983 Steady Three-Dimensional Convection at High Prandtl Numbers. *J. Fluid Mech.* **127**, 141-153.
- GOLLUB, J.P. & BENSON, S.V. 1980 Many Routes to Turbulent Convection. *J. Fluid Mech.* **100** Pt 3, 449-470.
- GREENSIDE, H.S., CROSS, M.C. & COUGHRAN, W.M.Jr. 1988 Mean Flows and the Onset of Chaos in Large Cell Convection. *Phys. Rev. Lett.* **60** (22), 2269-2272.
- GRUBER, C. & GRIFFITHS, R.B. 1986 Phase Transition in a Ferromagnetic Fluid. *Physica A* **138**, 220-230.
- HAKEN, H. 1977 *Synergetics*. Springer-Verlag, Berlin.
- HESS, S. 1987 Structure and Dynamics of Oriented Ferrofluids. In *Phys. of Complex and Supermolecular Fluids*, pp. 631-642 (herausgeg. von Safran, S.A. & Clark, N.A.) J. Wiley, New York.
- HURLE, D.T.J. & JAKEMAN, F. 1971 Soret-Driven Thermosolutal Convection. *J. Fluid Mech.* **47**, 667-687.

- JAKEMAN, E. 1968 Convective Instability in Fluids of High Thermal Diffusivity. *Phys. Fluids* **11** (1), 10-14.
- JEFFREY, G.B. 1922 The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A* **102**, 161.
- JENKINS, D.R. 1988 Interpretation of Shadowgraph Patterns in Rayleigh-Bénard Convection. *J. Fluid Mech.* **190**, 451-469.
- JENKINS, D.R. & PROCTOR, M.R.E. 1984 The Transition from Roll to Square-Cell solutions in Rayleigh-Bénard Convection. *J. Fluid Mech.* **139**, 461-471.
- JONES, G.A. 1988 Dilution-Induced Instability of Water-Based Magnetic Fluids. *IEEE Trans. MAG* **24** (2), 1656-1658.
- KITTEL, C. 1958 *Elementary Statistical Physics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- KOLODNER, P. 1986 Onset of Oscillatory Convection in a Binary Fluid Mixture. *Phys. Rev. Lett.* **56** (24), 2621-2624.
- KRAMER, L. & HOHENBERG, P.C. 1984 Effect of Boundaries on Periodic Patterns. In *Cellular Structures in Instabilities*, pp. 63-74 (herausgeg. von Wesfreid, J.E. & Zaleski, S.) Springer-Verlag, Berlin.
- KRISHNAMURTI, R. 1968 Finite Amplitude Convection with Changing Mean Temperature. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.* **33** (3), 445-455.
- KRISHNAMURTI, R. 1968 Finite Amplitude Convection with Changing Mean Temperature. Part 2. An Experimental Test of the Theory. *J. Fluid Mech.* **33** (3), 457-463.
- KRISHNAMURTI, R. 1970 On the Transition to Turbulent Convection. Part 1. The Transition from Two- to Three-Dimensional Flow. *J. Fluid Mech.* **42** (2), 295-307.
- KRISHNAMURTI, R. 1970 On the Transition to Turbulent Convection. Part 2. The Transition to Time-Dependent Flow. *J. Fluid Mech.* **42** (2), 309-320.
- LAMBRICK, D.B., HOON, S.R., MASON, N. & KILNER, M. 1988 Measurements of the Anisotropy Constant in Ni-Fe and Fe₃O₄ Magnetic Fluids. *IEEE Trans. Magn.* **24** (2), 1647-1649.
- LEAL, L.G. 1971 On the Effect of Particle Couples on the Motion of a Dilute Suspension of Spheroids. *J. Fluid Mech.* **46** (2), 395-416.
- LORENZ, E.N. 1963 Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmospheric Sci.* **20**, 130-141.
- LOULERGUE, J.C. 1984 Competition between Marangoni and Archimedian Forces, to Determine the Surface Profile of a Liquid Heated, Open to Air. In *Cellular Structures in Instabilities*, pp 358-375 (herausgeg. von Wesfreid, J.E. & Zaleski, S.) Springer Verlag, Berlin.

- LOWE, M., ALBERT, B.S. & GOLLUB, J.P. 1986 Convective flows with multiple spatial periodicities. *J. Fluid Mech.* **173**, 253-272.
- MALKUS, W.V.R. & VERONIS, G. 1958 Finite Amplitude Cellular Convection. *J. Fluid Mech.* **4**, 225.
- MIE, G. 1932 Elektrodynamik. In *Handbuch der Experimentalphysik, Band 11, 1. Teil* (herausgeg. von Wien, W. & Harms, F.) Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- MOSES, E. & STEINBERG, V. 1986 Competing Patterns in a Convective Binary Mixture. *Phys. Rev. Lett.* **57** (16), 2018-2021.
- MOSES, E. & STEINBERG, V. 1988 Mass Transport in Propagating Patterns of Convection. *Phys. Rev. Lett.* **60** (29), 2030-2033.
- NEWELL, A.C. & WHITEHEAD, J.A. 1969 Finite Bandwidth, Finite Amplitude Convection. *J. Fluid Mech.* **38**(2), 279 - 303.
- PAPELL, S.S. 1963 *Space Daily* 211.
- PETERSON, E.A. & KRUEGER, D.A. 1977 Reversible, Field Induced Agglomeration in Magnetic Colloids. *J. Coll. Interface Science* **62** (1), 24-34.
- POCHEAU, A. 1988 Transition to Turbulence in Convective Flows in a Cylindrical Container. In *Dynamics Days, Düsseldorf '88*.
- POMEAU, Y. & MANNEVILLE, P. 1979 Stability and Fluctuations of a Spatially Periodic Convective Flow. *J. Phys. (Paris) Lett.* **40** (23), 609-612.
- ROSENSWEIG, R.E. 1985 *Ferrohydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- ROSENSWEIG, R.E., NESTOR, J.N. & TIMMINS, R.S. 1965 Ferrohydrodynamic Fluids for Direct Conversion of Heat Energy *AIChE-I. Chem. Eng. Ser.* **5**, 104-118.
- SCHLUTER, A., LORTZ, D. & BUSSE, F.H. 1965 On the Stability of Steady Finite Amplitude Convection. *J. Fluid Mech.* **23** pt 1, 129-144.
- SCHMEIDLER, W. 1954 *Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum*. Teubner, Stuttgart.
- SCHOLTEN, P.C. 1983 How Magnetic Can a Magnetic Fluid Be? *J. Mag. Mag. Mat.* **39**, 99-106.
- SHLIOMIS, M.I. 1972 Effective Viscosity of Magnetic Suspensions. *Soviet Physics JETP* **34** (6), 1291-1294.
- SIGGIA, E.D. & ZIPPELIUS, A. 1981 Pattern Selection in Rayleigh-Bénard Convection near Threshold. *Phys. Rev. Lett.* **47** (12), 835-838.
- STORK, K. & MÜLLER, U. 1972 Convection in Boxes: Experiments. *J. Fluid Mech.* **54** pt 4, 599-611.

- STUART, J.T. 1958 On the Nonlinear Mechanics of Hydrodynamic Stability. *J. Fluid Mech.* **4**, 1-21.
- SWIFT, J. & HOHENBERG, P.C. 1977 Hydrodynamic Fluctuations at the Convective Instability. *Phys. Rev. A* **15** (1), 319-328.
- TARI, A., CHANTRELL, R.W., CHARLES, S.W. & POPPLEWELL, J. 1979 The Magnetic Properties and Stability of a Ferrofluid Containing Fe_3O_4 Particles. *Physica* **97 B**, 57-64.
- TSEBERS, A.O. & MAIOROV, M.M. 1980 Magnetostatic Instabilities in Plane Layers of Magnetizable Liquids. *Sov. Tech. Phys. Lett.* **6** (1), 50-51.
- VISLOVICH, A.N., SINITSYN, A.K. & TYMANOVICH, V.V. 1984 Instability of Plane-Parallel Couette Flow of a Magnetic Liquid in a Homogeneous Magnetic Field. *Magnetohydrodynamics* **20** (2), 131-136.
- WALDEN, R.W., KOLODNER, P., PASSNER, A. & SURKO, C.M. 1985 Travelling Waves and Chaos in Convection in Binary Fluid Mixtures. *Phys. Rev. Lett.* **55** (5), 496-499.
- WARNER, W.H. 1972 Poloidal and Toroidal Potentials for Solenoidal Fields. *J. App. Math. Phys. (ZAMP)* **23**, 221-230.
- WESFREID, J., POMEAU, Y., DUBOIS, M., NORMAND, C. & BERGE, P. 1978 Critical Effects in Rayleigh-Bénard Convection. *J. Phys. Lett.* **39** (7), 725-731.
- WHITE, D.B. 1988 The Planforms and Onset of Convection with a Temperature-Dependent Viscosity. *J. Fluid Mech.* **191**, 247-286.
- ZALESKI, S. 1984 Wavelength Selection through Boundaries in 1-D Cellular Structures. In *Cellular Structures in Instabilities*, pp. 84-103 (herausgeg. von Wesfreid, J.E. & Zaleski, S.) Springer Verlag, Berlin.

Während der Entstehung der vorliegenden Arbeit ist mir Hilfe von vielen Seiten zuteil geworden. An erster Stelle seien meine verehrten Lehrer genannt.

Herr Prof. Dr. K. Stierstadt hat die Arbeit angeregt und begleitet. Seiner unermüdlichen Unterstützung und seiner ermutigenden Förderung gilt mein besonderer Dank.

Herrn Prof. Dr. F. Busse danke ich für die freundliche Aufnahme an der UCLA während des Sommersemesters 1984 und für die zahlreichen Diskussionen, in denen er mir Einblick in die komplexe Welt hydrodynamischer Instabilitäten gewährte.

Herrn Prof. Dr. H. Wagner, an dessen engagiert geführten Seminaren zum Thema Chaos und Unordnung ich das Glück hatte teilnehmen zu können, verdanke ich meine Kenntnisse zur nichtlinearen Dynamik.

Der experimentelle Teil der Arbeit wäre ohne die ideenreiche Unterstützung durch die Mitarbeiter der mechanischen Werkstätten und des Elektroniklabors nicht möglich gewesen.

Meinen Kollegen und Labornachbarn sowie den Damen und Herren der Geschäftsführung und des Sekretariats möchte ich für ihre Hilfsbereitschaft und die freundschaftliche Zusammenarbeit danken.

Andrea danke ich für Ihre Geduld und Hilfe beim Tippen des Manuskripts.

Die Stiftung Volkswagenwerk hat die Arbeit finanziert.

Lebenslauf

- von: Leonhard Schwab, geboren am 21.7.1952
in Haunstetten, nun Augsburg.
- Eltern: Leonhard Schwab, Diplom Ingenieur
Johanna Schwab, geb. Mayer.
- Schule: 1958-1964 Volksschule in Haunstetten.
1964-1968 Realschule in Augsburg.
1968-1971 Ausbildung zum Elektromechaniker und
Praxis bei Siemens in Augsburg.
1971-1974 Bayernkolleg in Augsburg.
- Studium: 1974-1981 Physik an der Ludwig-Maximilians-Uni-
versität in München.
- Beruf: seit 1982 wissenschaftlicher Angestellter an der
Ludwig-Maximilians-Universität in Mün-
chen. Arbeitsgebiet: Magnetismus und
hydrodynamische Instabilitäten.

